

Simulation und experimentelle Überprüfung der  
homogenen Tropfenkondensation und  
-verdampfung in einer zylindrischen Kammer

**Diplomarbeit**

*von*

Peter Vennemann  
Matr.-Nr.: 1138256

Universität Essen  
Strömungslehre  
Schützenbahn 70  
45127 Essen

Betreuer: Dipl.-Ing. A. Graßmann, Prof. Dr.-Ing. F. Peters

August 2002

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Tropfenkondensation und -verdampfung . . . . .	3
2.1.1	Übersättigung . . . . .	3
2.1.2	Keimbildung . . . . .	3
2.1.3	Wachstum . . . . .	7
2.2	Wärmeleitung . . . . .	13
2.2.1	Geschlossene Lösung der Wärmeleitgleichung . . . . .	14
2.2.2	Lösung mit dem Verfahren finiter Differenzen . . . . .	15
2.3	Rückwirkung der Wachstumsgesetze auf die Wärmeleitung . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Berechnungsprogramm</b>	<b>22</b>
3.1	Programmierung . . . . .	22
3.2	Dokumentation . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Das pex-tube Experiment</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>32</b>
5.1	Experiment . . . . .	32
5.2	Simulation . . . . .	33
5.3	Vergleich von Experiment und Berechnung . . . . .	34
5.4	Diskussion am Beispiel weiterer Berechnungen . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Stoffwerte</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Ergänzende Erläuterungen</b>	<b>50</b>
B.1	Druckerhöhung durch Oberflächenspannung . . . . .	50
B.2	Isentrope Expansion im pex-tube . . . . .	50

# Symbole

## Lateinische Buchstaben

Zeichen	Beschreibung	SI-Einheit
$a$	Temperaturleitfähigkeit	$\text{m}^2/\text{s}$
$a$	Gitterpunkt in Kapitel 2.2.2	—
$A$	Komponente A	—
$B$	Komponente B	—
$Bi$	Biot-Zahl	—
$c$	spezifische Wärmekapazität	$\text{J}/(\text{kg K})$
$c_p$	spezifische isobare Wärmekapazität	$\text{J}/(\text{kg K})$
$c_v$	spezifische isochore Wärmekapazität	$\text{J}/(\text{kg K})$
$G$	freie Enthalpie	$\text{J}/\text{kg}$
$h$	spezifische Enthalpie	$\text{J}/\text{kg}$
$h$	allgemeine Schrittweite in Kapitel 2.2.2	—
$\Delta h_v$	spezifische Verdampfungsenthalpie	$\text{J}/\text{kg}$
$J$	Keimbildungsrate	$1/(\text{m}^3 \text{ s})$
$J_0$	Bessel-Funktion nullter Ordnung	—
$J_1$	Bessel-Funktion erster Ordnung	—
$J_m$	Massenstromdichte	$\text{kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$
$J_q$	Wärmestromdichte	$\text{J}/(\text{m}^2 \text{ s})$
$k$	Boltzmann-Konstante	$\text{J}/\text{K}$
$k$	Zähler in Gleichung 2.23	—
$Kn$	Knudsen-Zahl	—
$l$	mittlere, freie Weglänge	$\text{m}$
$L$	halbe Länge der Zylinderachse	$\text{m}$
$m$	Masse	$\text{kg}$
$n$	Zähler	—
$n$	Keimkonzentration	$1/\text{m}^3$
$p$	Druck	$\text{Pa}$
$p$	Modul (Stabilitätskriterium)	—
$Pr$	Prandtl-Zahl	—
$r$	Radiuskoordinate	$\text{m}$
$\Delta r$	Gitterweite entlang des Radius	$\text{m}$

$R$	Zylinderradius	m
$R$	spezielle Gaskonstante	J/(kg K)
$\bar{R}$	mittlere spezielle Gaskonstante	J/(kg K)
$s$	spezifische Entropie	J/(kg K)
$S$	Entropie	J/K
$S$	Sättigungsgrad	—
$Sc$	Schmidt-Zahl	—
$t$	Zeit	s
$T$	Temperatur	K
$v$	spezifisches Volumen	m <sup>3</sup> /kg
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$W$	Arbeit	J
$x$	Molmassenanteil	—
$z$	Koordinate entlang der Zylinderachse	m
$\Delta z$	Gitterweite parallel zur Zylinderachse	m

### griechische Buchstaben und Sonderzeichen

Zeichen	Beschreibung	SI-Einheit
$\Delta$	Laplacescher Operator	—
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	W/(m <sup>2</sup> K)
$\alpha$	Verdampfungskoeffizient in Gleichung 2.13	—
$\zeta$	Eigenwert in Gleichung 2.23	—
$\eta$	dynamische Viskosität	kg/(m s)
$\vartheta$	Temperaturdifferenz	K
$\kappa$	Isentropenexponent	—
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W/(K m)
$\mu$	Eigenwert in Gleichung 2.23	—
$\rho$	Massendichte	kg
$\sigma$	Oberflächenspannung	N/m
$\varphi$	Zylinderkoordinate Winkel	—

### Indizes und hochgestellte Zeichen

Zeichen	Beschreibung	Zeichen	Beschreibung
*	kritisch	$i$	Grenze der Knudsen-Schicht
$\infty$	Umgebungszustand	$l$	Flüssigkeit
$A$	Oberfläche	$m$	Masse
$b$	Siedepunkt	$n$	Normzustand
$d$	Tropfen	$q$	Wärme
$e$	Gleichgewichtszustand	$v$	Dampf
$g$	Gas		

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Kondensation von Flüssigkeitstropfen aus Dampf beginnt an Kondensationskeimen. Dienen Aerosole oder ausgedehnte Oberflächen als Keim, spricht man von heterogener Kondensation. Bei Abwesenheit von Kondensationsoberflächen werden Keime aus dem Dampf selbst gebildet, man spricht von homogener Kondensation. Ist der temperaturabhängige Gleichgewichtsdampfdruck unmittelbar über einer Flüssigkeit niedriger als der Partialdruck des Dampfes in der entfernten Umgebung, so kondensiert der Dampf an der offenen Oberfläche. Dabei sinkt der Partialdruck des Dampfes in der Umgebung, bis die Drücke ausgeglichen sind und die Kondensation zum Stillstand kommt. Ist das Druckverhältnis umgekehrt, verdampft die Flüssigkeit entweder bis der Partialdruck des Dampfes in der Umgebung im Gleichgewicht mit dem Dampfdruck über der Flüssigkeitsoberfläche steht oder die Flüssigkeit vollständig verdampft ist.

Die Entstehung und Verdampfung von Flüssigkeitsnebeln spielt in vielen Gebieten der Forschung und Technik eine wichtige Rolle. Die homogene Kondensation ist zum Beispiel der maßgebende Faktor bei der Erosion von Bauteilen in Dampfturbinen [7]. Im expandierenden Dampfstrom bilden sich kleinste Kondensattröpfchen, die sich an den Leitschaufeln niederschlagen, sammeln, als größere Tropfen ablösen und nachfolgende Schaufeln, Anschlüsse von Anzapfleitungen und andere Drosselstellen durch Tropfenschlag beschädigen. Man begegnet dem Problem durch Panzerung der gefährdeten Oberflächen mit hochlegierten Schichten und Nachverdampfung des Kondensats [7]. Ein grundlegendes Verständnis der Tropfenkondensation wird ebenfalls bei der Konstruktion von Niederdruckstufen und Nassläuferturbinen benötigt.

Ein Beispiel für das Interesse an der Verdampfung von kleinen Tröpfchen ist die Aufgabe der innigen Vermischung von flüssigen Brennstoffen und Verbrennungsluft. Der Brennstoff wird zu Nebel versprüht und sollte vor der Verbrennung durch Zufuhr von Wärme aus der Umgebung möglichst vollständig verdampft werden. Dabei gibt es eine große Anzahl von Anwendungen. Diese reichen von der Verbrennung von Heizöl in Blaubrennern oder Kerosin in Flugzeugtriebwerken, bis hin zu den vielen unterschiedlichen Verfahren der direkten und indirekten Kraftstoffeinspritzung in Kolbenmaschinen.

Verschiedene Fragen der Klimaforschung und Meteorologie lassen sich auf das Problem der Tröpfchenkondensation zurückführen. Welchen Einfluss haben vom Menschen in die Atmosphäre eingebrachte Aerosole wie kleinste Eiskristalle hinter Flugzeugturbinen, Wasserdampf Wolken über den Kühltürmen von Wärmekraftwerken oder Feinststaubbahnen auf der windabgewandten Seite von Städten? Wie verändert sich die Wolkenbildung in einer durch den Treibhauseffekt erwärmten Atmosphäre?

Das Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der Tröpfchenkondensation und Verdampfung, sowie die experimentelle Überprüfung der Ergebnisse. Dabei steht nicht die Darstellung der Wachstumsgesetze eines Einzeltropfens im Vordergrund. Dieses wurde bereits von Peters und Paikert [15] ausführlich durchgeführt. Vielmehr wird der Einfluss einer technischen Umgebung auf die Kondensation und Verdampfung untersucht. Dabei wird die Tröpfchengröße innerhalb eines Nebels zeit- und ortsabhängig berechnet.

Turbinen und Motoren sind Körper mit komplizierten Geometrien und Strömungsverhältnissen, welche die Berücksichtigung einer Vielzahl von miteinander verknüpften Randbedingungen für die Berechnung der Tröpfchenkondensation erfordern. Die Einbeziehung aller notwendigen Randbedingungen ist nicht nur sehr aufwändig, sie verschleiert auch den Blick auf die grundlegenden Zusammenhänge. Eine experimentelle Überprüfung ist schwer durchzuführen. Daher wird eine Versuchseinrichtung gesucht, in welcher sich die Kondensation eines Tröpfchennebels und seine Verdampfung unter idealisierten Randbedingungen berechnen und beobachten lässt. Von diesem einfachen, dem Verständnis dienenden Fall, kann später auf kompliziertere und schließlich auf praxisnahe Fälle geschlossen werden. Idealisierte Randbedingungen können in einem von Peters und Meyer [13] entwickelten Kolbenexpansionsrohr, im Folgenden *pex-tube*<sup>1</sup> genannt, erreicht werden. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um einen Zylinder, in dem mit Hilfe eines geführten Kolbens eine isentrope Expansion durchgeführt werden kann. Bei der mit der Expansion zusammenhängenden Temperatursenkung kann ein Dampf homogen kondensiert werden. Wärme aus der Mantelfläche und den Stirnseiten des Zylinders verdampft den Nebel anschließend.

In Kapitel 2 sind die Theorie des Tröpfchenwachstums und die notwendigen Gesetze der Wärmeleitung zusammengestellt. Diese Gleichungen werden in einem Berechnungsprogramm zusammengeführt, welches im dritten Kapitel dokumentiert ist. Im vierten Kapitel werden die Versuchseinrichtung und das Experiment beschrieben, dessen Ergebnisse im fünften Kapitel mit den Berechnungsergebnissen verglichen und diskutiert werden.

---

<sup>1</sup>engl. piston expansion tube

# Kapitel 2

## Theorie

### 2.1 Tropfenkondensation und -verdampfung

Die homogene Tropfenkondensation kann in drei Stufen eingeteilt werden: Übersättigung, Keimbildung und Wachstum.

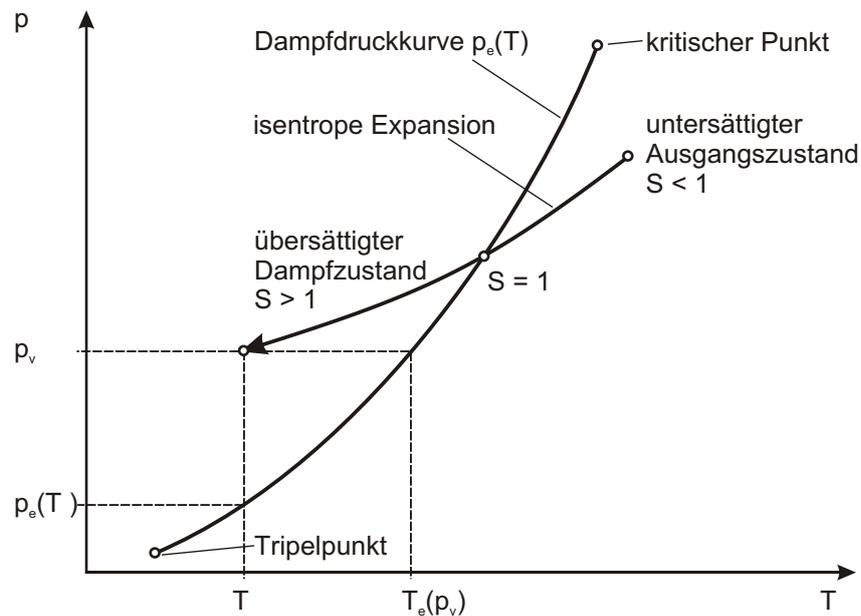
#### 2.1.1 Übersättigung

Abbildung 2.1 zeigt eine Dampfdruckkurve wie sie sich im  $p,T$ -Diagramm darstellt. Entlang der Dampfdruckkurve befinden sich die beiden Phasen Gas und Flüssigkeit im Gleichgewicht. Links der Kurve ist der Dampf übersättigt oder unterkühlt. Dieser Zustand ist nur unter gewissen Umständen stabil. Versucht man gesättigten Dampf durch den Entzug von Wärme über eine Versuchsbehältergrenze hinweg zu übersättigen, so wird die Übersättigung, so schnell wie die Moleküle an die Wand gelangen können, durch Kondensation an der benetzbaren Behälteroberfläche abgebaut. Die Prozesskurve in Abbildung 2.1 verdeutlicht, wie mit Hilfe einer isentropen Expansion die Dampfdruckkurve überschritten und der Dampf übersättigt werden kann. Dabei wird der Dampf zweckmäßigerweise mit einem nicht kondensierenden Trägergas gemischt. Ein Maß für die Übersättigung ist der Sättigungsgrad  $S$ . Er ist nach Gleichung 2.1 das Verhältnis des tatsächlichen Dampfdruckes  $p_v(T_\infty)$  und des aus der Dampfdruckkurve folgenden Gleichgewichtsdampfdruckes  $p_e(T_\infty)$ . Er ist unabhängig von der Anwesenheit eines Trägergases.

$$S = \frac{p_v(T_\infty)}{p_e(T_\infty)} \quad (2.1)$$

#### 2.1.2 Keimbildung

Nach Überschreiten der Dampfdruckkurve assoziieren zufällig zusammenprallende Dampfmoleküle zu so genannten Clustern, die sich bei leichter Übersättigung schnell wieder auflösen [3]. Ab einer bestimmten, als kritisch bezeichneten Größe wachsen

Abbildung 2.1: Isentrope Expansion und Dampfdruckkurve im  $p,T$ -Diagramm.

die Cluster irreversibel zu makroskopischen Tröpfchen heran, bis der Partialdruck des Dampfes dem Gleichgewichtsdampfdruck über der Tropfenoberfläche entspricht. Das Verständnis dieses Verhaltens gelingt mit Hilfe des Vergleichs der freien Enthalpie des übersättigten Zustands mit der des Gleichgewichtszustands. Nach dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik strebt ein freiwillig ablaufender Prozess stets einem Zustand geringster, freier Enthalpie entgegen. Die Ableitung der allgemeinen Zustandsgleichung der freien Enthalpie – die Gibbs-Funktion, Gleichung 2.2 – beschreibt die Änderung der freien Enthalpie eines Zustands.

$$dG = -SdT + Vdp \quad (2.2)$$

Im speziellen Fall der Clusteragglomeration ändert sich die freie Enthalpie zusätzlich durch die Aufnahme von Arbeit zur Bildung der Phasengrenzfläche, dessen Eigenspannung den Druck innerhalb des Clusters erhöht. Die Arbeit, welche zur Vergrößerung einer Oberfläche verrichtet werden muss, ist gleich dem Produkt aus der Oberflächenspannung und dem Flächenzuwachs. Für die Bildung der kugelförmigen Clusteroberfläche ergibt sich daraus Gleichung 2.3.

$$W_A = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \sigma \quad (2.3)$$

Der zweite Term der Gibbs-Funktion (Gleichung 2.2) ist von der Form Druckänderungsarbeit, welche hier beim Übergang von Dampf zu Flüssigkeit gewonnen wird. Zur Veranschaulichung stelle man sich vor, der Dampf kondensiere an einer großen, offenen Flüssigkeitsoberfläche, dessen Temperatur gleich der Dampftemperatur sei und

sich aufgrund der Größe des Flüssigkeitsreservoirs während der Kondensation nicht ändere. Dann herrscht unmittelbar über der Flüssigkeitsoberfläche der Gleichgewichtsdampfdruck  $p_e(T)$  und in großer Entfernung der Oberfläche der erheblich höhere Partialdruck des übersättigten Dampfes  $p_v(T)$ . Der Dampf expandiert auf dem Weg zur Tropfenoberfläche. Die bei der Expansion gewinnbare Druckänderungsarbeit erhöht beim Phasenwechsel gasförmig-flüssig die freie Enthalpie. Sie berechnet sich nach Gleichung 2.4.

$$W_p = \int_{p_e(T_\infty)}^{p_v(T_\infty)} V dp \quad (2.4)$$

Mit der Idealen Gasgleichung

$$V = \frac{m \cdot R_v \cdot T}{p}, \quad (2.5)$$

in der die Masse durch das Produkt aus Clustervolumen und Dichte des Kondensats ersetzt wird, folgt nach Integration von 2.4 Gleichung 2.6.

$$W_p = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_d^3 \cdot \rho_l \cdot R_v \cdot T_\infty \cdot \ln \left( \frac{p_v(T_\infty)}{p_e(T_\infty)} \right) \quad (2.6)$$

Wenn angenommen wird, dass während der Keimbildung noch keine Temperaturdifferenzen zwischen Cluster und umgebendem Gas existieren, ist der Vorgang der Clusterbildung reversibel, das heißt der Entropieterm der Gibbs-Funktion ist Null. Reversibilität beobachtet man schließlich auch bei Clustern mit unterkritischem Radius. Dann folgt die Berechnung der Änderung der freien Enthalpie bei der Clusterherstellung aus der Summe der aufzubringenden Arbeit  $W_A$  und der gewinnbaren Arbeit  $W_p$  (Gleichung 2.7). Darin wurde das Druckverhältnis nach Gleichung 2.1 durch den Sättigungsgrad ersetzt.

$$\Delta G = 4 \cdot \pi \cdot r_d^2 \cdot \sigma - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_d^3 \cdot \rho_l \cdot R_v \cdot T_\infty \cdot \ln(S) \quad (2.7)$$

In Abbildung 2.2 ist die Änderung der freien Enthalpie  $\Delta G$  bei der Keimbildung für Propanol bei jeweils zwei verschiedenen Temperaturen und Sättigungsgraden als Funktion des Radius dargestellt. Bei sehr kleinen Radien überwiegt die zur Oberflächenbildung aufzubringende Arbeit. Die freie Enthalpie steigt mit jedem Molekül, das dem Cluster hinzugefügt wird, die Keime sind instabil. Wird der kritische Radius erreicht, überwiegt die Druckänderungsarbeit und die freie Enthalpie nimmt mit jedem zusätzlich aufgenommenen Molekül irreversibel ab. Der Keim wächst zu einem makroskopischen Tropfen heran. Man erkennt, dass die zur Oberflächenbildung aufzubringende Arbeit die Existenz übersättigter Zustände überhaupt erst ermöglicht. Die Abbildung zeigt auch, dass bei steigender Temperatur und bei steigender Sättigung der kritische Radius abnimmt. Daraus lassen sich wichtige Schlüsse für die später beschriebene Versuchsdurchführung ziehen. Da die Cluster, wie eingangs erwähnt, durch zufällig erfolgende Stöße entstehen, kann man vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines überkritischen Clusters mit Abnahme des kritischen Radius exponentiell steigt. Daraus folgt, dass bei einer stärkeren, isentropen Expansion (erhöhter

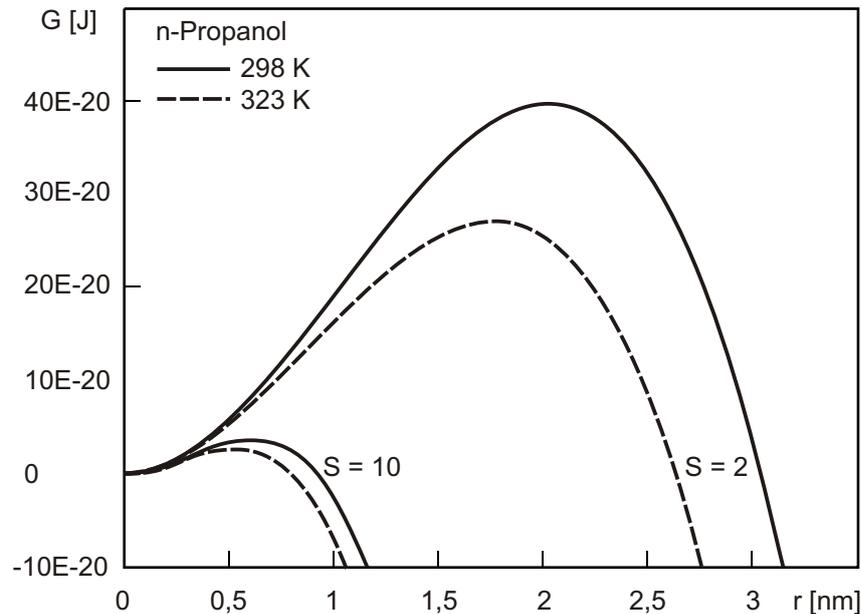


Abbildung 2.2: Änderung der freien Enthalpie  $\Delta G$  bei der Keimbildung als Funktion des Keimradius in Abhängigkeit von Temperatur und Sättigungsgrad für n-Propanol.

Sättigungsgrad) aber auch bei Aufheizung der Trägergas-Dampf Mischung (bei konstantem Sättigungsgrad) eine exponentiell steigende Anzahl der Cluster kritisch werden und als Kondensationskeim wirken. Tatsächlich fanden die Begründer der klassischen Keimbildungstheorie, Volmer und Weber [20], für die Keimbildungsrate den Ansatz nach Beziehung 2.8. Danach erhöht sich die Keimbildungsrate, je weniger Arbeit für die Bildung eines kritischen Keims aufgebracht werden muss.

$$J \sim e^{-\frac{\Delta G^*}{k \cdot T}} \quad (2.8)$$

Das Maximum der Funktion 2.7 markiert den kritischen Keimradius  $r^*$ . Er ergibt sich nach Differentiation der rechten Seite von Gleichung 2.7, Nullsetzen und Auflösen nach  $r^*$  zu:

$$r^* = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho_l \cdot R_v \cdot T_\infty \cdot \ln(S)} \quad (2.9)$$

Setzt man für die Sättigung Gleichung 2.1 ein und löst zum Gleichgewichtsdampfdruck  $p_e(T_\infty)$  auf, erhält man eine Gleichung die von der Form her identisch mit der Thomson oder Kelvin-Gleichung ist, mit der sich der Dampfdruck über gekrümmten Oberflächen berechnen lässt (Gleichung 2.10).

$$p_e(T_l, r_d) = p_e(T_l) \cdot e^{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho_l \cdot R_v \cdot T_l \cdot r}} \quad (2.10)$$

Es lässt sich ablesen, dass der temperaturabhängige Gleichgewichtsdampfdruck über sehr stark gekrümmten Oberflächen gegenüber des Gleichgewichtsdampfdruckes

über einem ebenen Flüssigkeitsspiegel stark zunimmt. Man erkennt aus dem Vergleich der Gleichungen 2.10 und 2.9, dass der Dampfdruck unmittelbar über der Clusteroberfläche bei kritischem Radius  $p_e(T_l, r_d^*)$  exakt dem Dampfdruck der Umgebung  $p_e(T_\infty)$  entspricht. Nimmt das Cluster ein Molekül zusätzlich auf sinkt der Dampfdruck über der Clusteroberfläche unter den der Umgebung: das Tröpfchen wächst. Gibt das kritische Cluster ein Molekül ab, steigt der Dampfdruck über der Oberfläche und das Cluster muss sich auflösen. Bei Unterkühlung der Dampf- Trägergasmischung weit unter den Gefrierpunkt des kondensierenden Stoffes, ist ein unmittelbares Ausscheiden von Kristallen aus dem Dampf denkbar.

Im nächsten Kapitel wird die Berechnung des nach der Keimbildung einsetzenden Tröpfchenwachstums erläutert. Zur Anpassung der Randbedingungen während des Wachstums und der Verdampfung muss die Keimkonzentration bekannt sein. Die auf den Ansatz 2.8 aufbauende Klassische Keimbildungstheorie (KKT) macht unter anderem Angaben zur Keimbildungsrate  $J$ , aus der die Keimkonzentration abgeleitet werden kann. Bei Berücksichtigung zahlreicher Korrekturen und Verbesserungen erweist sich die Lösung der KKT in vielen Fällen als Näherung [14, 16], in manchen Fällen als unzulänglich [18]. Um den mit der KKT verbundenen Unsicherheiten aus dem Weg zu gehen, wird die Tröpfchenkonzentration experimentell bestimmt und den Berechnungen vorgegeben. Bei den in der Einleitung erwähnten Anwendungen, bei denen die Tröpfchen nicht durch homogene Kondensation, sondern zum Beispiel mit Hilfe von Einspritzdüsen entstehen, muss die Tröpfchenkonzentration ebenfalls als aus Experimenten bekannt vorausgesetzt werden. Es erscheint deshalb gerechtfertigt, die KKT an dieser Stelle nicht weiter zu vertiefen.

### 2.1.3 Wachstum

Ein Tropfen, dessen Gleichgewichtsdampfdruck unmittelbar über der Tropfenoberfläche sich vom Partialdruck des Dampfes der entfernteren Tropfenumgebung unterscheidet, verändert seine Größe. Liegt der temperaturabhängige Gleichgewichtsdampfdruck unter dem Partialdruck der Umgebung, wächst der Tropfen durch Kondensation, im umgekehrten Fall reduziert sich die Tropfengröße durch Verdampfung.

Zur Beschreibung der Zu- und Abnahme der Tropfengröße in Abhängigkeit der Umgebungsbedingungen wurden im Laufe des letzten Jahrhunderts Wachstumsgesetze für den Einzeltropfen entwickelt und mit verschiedenen Ansätzen verbessert. Dabei werden einige Vereinfachungen vorgenommen. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass der Abstand zwischen den Einzeltropfen so groß ist, dass Wechselwirkungen zwischen den Tropfen ausgeschlossen sind. In diesem Fall können die Gesetze auf einen Tröpfchennebel angewendet werden. Ehrler [3] zufolge, können in technischen Apparaten Tröpfchenkonzentrationen von bis zu  $10^{12} \text{ m}^{-3}$  im Sekundenbereich aufrechterhalten werden, ohne dass sich die Tröpfchenanzahl durch Zusammenstöße vermindert (Koagulation). Es wird vorausgesetzt, dass die Tröpfchen gleichmäßig im Raum verteilt sind. Außerdem wird eine Relativbewegung zwischen Tropfen und umgebender Gasmischung ausgeschlossen. Die betrachteten Zeiträume seien so kurz, dass

einsetzende Konvektion keinen Einfluss hat, es wird nur Wärmeleitung berücksichtigt. Den Wachstumsgesetzen liegen die im Folgenden beschriebenen Modellvorstellungen zugrunde.

Bei der Kondensation wird Kondensationsenthalpie frei, welche vom Tröpfchen weg transportiert werden muss. Der Stofftransport in Richtung Tröpfchenoberfläche ist daher mit einem Wärmestrom in entgegengesetzter Richtung verknüpft. Zur Berechnung des Tröpfchenwachstums können die Energie- und Massenstrombilanzen um das Tröpfchen herum aufgestellt werden. Diese sind von den Transportkoeffizienten Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und Diffusionskoeffizient  $D$  (Ficksche Diffusion) und von den treibenden Gradienten von Temperatur  $dT/dr$  und Dampfdruck  $dp_v/dr$  abhängig.

Abbildung 2.3 verdeutlicht die Bildung der Temperatur- und Druckgradienten in der Umgebung eines kondensierenden Einzeltropfens. Die Tropfentemperatur  $T_l$  regelt sich wegen der freiwerdenden Kondensationsenthalpie oberhalb der Umgebungstemperatur  $T_\infty$ , aber unterhalb der Gleichgewichtstemperatur  $T_e(p_{v\infty})$  des übersättigten Umgebungszustandes ein. Dabei wirkt die Temperaturänderung im Wechsel mit dem kondensierenden Massenstrom. Innerhalb des Tröpfchens, wird vereinfachend angenommen, gibt es keine Temperaturgradienten. Abweichungen von der wahren Mitteltemperatur liegen aufgrund dieser Vereinfachung nach Baehr und Stephan [1] für eine Biot-Zahl (Gleichung 2.11) von 0,1 unter 2 Prozent. Bei den durchgeführten Berechnungen beträgt die maximal zu erwartende Biot-Zahl etwa 0,11.

$$Bi = \frac{\alpha \cdot r_d}{\lambda_l} \quad (2.11)$$

Der Totaldruck  $p_\infty$  ist örtlich konstant, lediglich innerhalb des Tröpfchens ist er wegen der Oberflächenspannung um den Betrag  $2 \cdot \sigma/r_d$  erhöht (siehe Anhang B.1). Der Dampfdruck unmittelbar über der Tropfenoberfläche  $p(T_d, r)$  ist höher, als der Gleichgewichtsdampfdruck der Umgebung  $p_e(T_\infty)$ . Diese Druckerhöhung rührt zum einen von der gekrümmten Oberfläche. Dieser Anteil wird von der Kelvin-Gleichung (Gleichung 2.10) beschrieben. Zum anderen ist die Tropfentemperatur  $T_d$  während der Kondensation größer als die Umgebungstemperatur  $T_\infty$ , was ebenfalls zu erhöhtem Dampfdruck über der Tropfenoberfläche führt.

Da die Summe des Dampfdruckes  $p_v(r)$  und des Trägergasdruckes  $p_g(r)$  dem örtlich konstanten Totaldruck  $p_\infty$  entsprechen muss, ist dem Dampfdruckgradienten ein ebenso großer Partialdruckgradient des Trägergases überlagert. Dieser Gradient führt zu einer Diffusion von Trägergas vom Tropfen weg. Um die Trägergaskonzentration über der Tröpfchenoberfläche aufrecht zu erhalten, setzt ein kompensierender Massenstrom von der Umgebung in Richtung Tröpfchenoberfläche ein, der Trägergas und Dampf enthält. Da die Trägergasmassenströme vom und zum Tropfen ausgeglichen sein müssen, wird der Dampfmassenstrom durch den mitgeführten Dampf erhöht. Dieser zusätzliche Dampfstrom wird Stefan-Strom genannt. Bei der Aufstellung der Wachstumsgesetze muss entschieden werden, ob der Stefan-Strom einen relevanten Beitrag zum Massenstrom leistet.

Die für technische Anwendungen entwickelten Gesetze für Diffusion und Wärme-

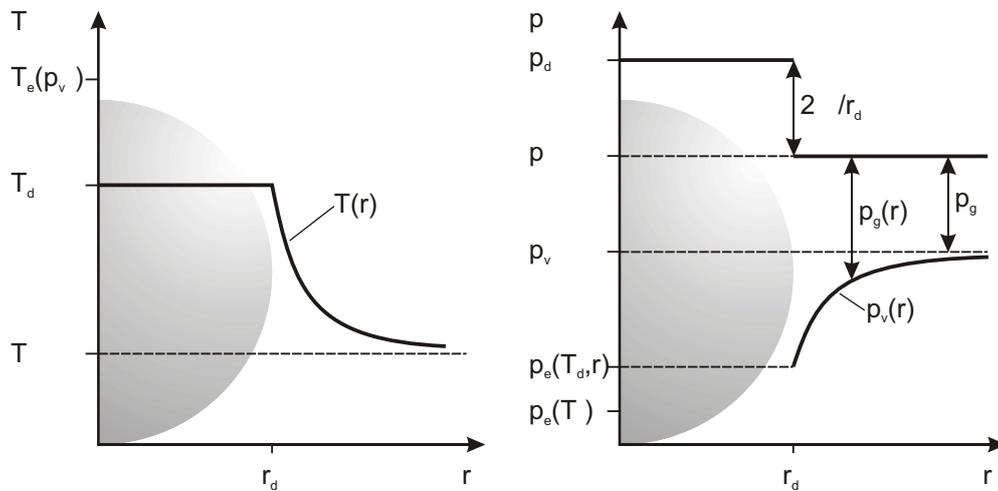


Abbildung 2.3: Zustandsänderungen in der Umgebung eines kondensierenden Einzeltröpfens.

leitung bauen üblicherweise auf der Kontinuumshypothese auf. Das heißt, es werden Fluidteilchen betrachtet, welche einerseits im Vergleich zum technisch interessierenden Teil des Fluidvolumens infinitesimal klein sind, andererseits aber eine genügend große Anzahl von Molekülen beinhalten, so dass die Mittelung bestimmter Stoffeigenschaften sinnvoll ist. Auf diese Weise lässt sich zum Beispiel erst die Dichte  $\rho$  für Fluide einführen.

Wenn die Tropfengröße im Bereich der mittleren freien Weglänge der Moleküle zwischen zwei Stößen liegt, können die modellhaften Kontinuumsgleichungen keine Gültigkeit mehr besitzen. In diesem Bereich müssen Wärme- und Stofftransportgleichungen mit Hilfe der komplizierteren kinetischen Gastheorie gefunden werden, die molekulare Stoffeigenschaften erfasst. Die verschiedenen Gültigkeitsbereiche lassen sich mit Hilfe der Knudsen-Zahl voneinander abgrenzen (Gleichung 2.12). Bei Knudsen-Zahlen von  $Kn \ll 1$  gelten die Gleichungen des Kontinuums.

$$Kn = \frac{l}{2 \cdot r_d} \tag{2.12}$$

Abbildung 2.4 verdeutlicht schematisch die Modellvorstellung der Tropfenkondensation, wie sie von Gyarmathy [6] vorgestellt wurde. Größere Tropfen wachsen durch einen stetigen Diffusionsstrom von Dampfmolekülen kontinuierlich an. Befindet sich die Tröpfchengröße im Bereich der mittleren, freien Weglänge der Moleküle, müssen molekulare Transportgleichungen gefunden werden.

Von Peters und Paikert [15] wurde ein von Young [21] entwickeltes Wachstumsmodell erfolgreich angewendet und experimentell bestätigt. Bei diesem Modell wird der Wärme- und Stofftransport in einiger Entfernung des Tropfens mit den Transportgleichungen des Kontinuums beschrieben, ungefähr eine freie Weglänge  $l$  über der

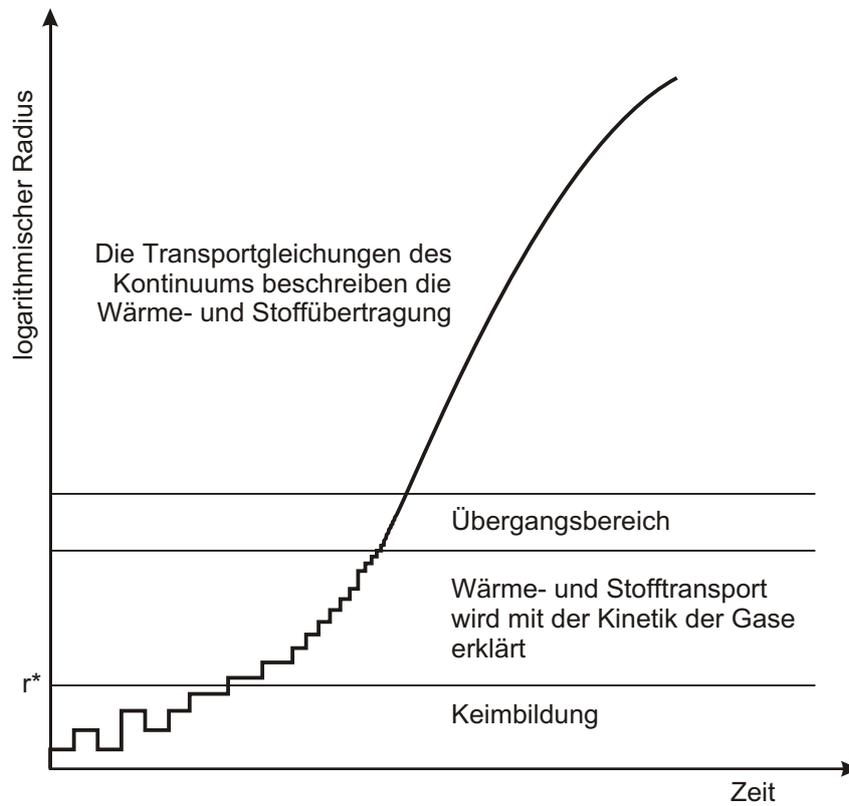


Abbildung 2.4: Schema der Modellvorstellung einer homogenen Tropfenkondensation.

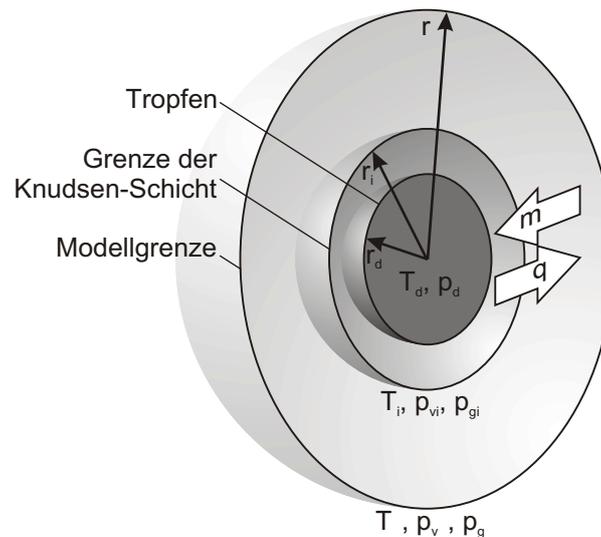


Abbildung 2.5: Abgeschlossenes System zur Berechnung der homogenen Tröpfchenkondensation nach Young.

Tropfenoberfläche wird die kinetische Gastheorie herangezogen. Die Schicht mit dem Radius  $r_i \approx r_d + l$ , innerhalb derer die Kontinuums-Gleichungen nicht gültig sind, wird Knudsen-Schicht genannt. Das Modell besteht, wie in Abbildung 2.5 gezeigt, aus einem sphärischen, masse- und wärmedichten System, in dessen Zentrum sich das Tröpfchen befindet.

Das Youngsche Gleichungssystem besteht aus jeweils zwei Gleichungen für die Massenstrom- und die Wärmestromdichte. Eine der Gleichungen gilt jeweils innerhalb der Knudsen-Schicht. Das Modell enthält eine Korrektur, die den Bereich der Knudsen-Zahl  $Kn \approx 1$  gesondert behandelt, so dass die Gleichungen ineinander übergehen. Zur Lösung des Gleichungssystems werden Variablen für Dampfdruck und Temperatur auf der Grenze der Knudsen-Schicht benötigt. Peters und Paikert [15] gelingt es mit einigen zusätzlichen, durch die experimentellen Randbedingungen ermöglichten, Vereinfachungen diese Größen zu eliminieren und das Gleichungssystem auf zwei Gleichungen zu reduzieren, die für das gesamte Wachstum vom Keim bis zum ausgewachsenen Tropfen gültig sind. Die Vereinfachungen lauten:

- die Temperaturverhältnisse  $T_\infty/T_d$  und  $T_\infty/T_i$  werden mit 1 angenähert, da die Temperaturdifferenzen zwischen Tropfen und Umgebung gering sind.
- Das Druckverhältnis  $p_{vi}/p_\infty$  wird durch  $p_{v\infty}/p_\infty$  ersetzt, da sich bei geringen Dampfdrücken der Unterschied zwischen  $p_{v\infty}$  und  $p_{vi}$  nur gering auf den Wert des Quotienten auswirkt.
- Das Verhältnis der Radien  $R_d/r_i$  kann für  $Kn \rightarrow \infty$  null und für  $Kn \rightarrow 0$  eins gesetzt werden.

Damit wird für die Massenstromdichte und für die Wärmestromdichte folgendes Gleichungssystem angegeben:

$$J_m = \frac{D(p_e(T_d, r_d) - p_{v\infty})p_\infty}{R_v T_\infty p_{g\infty} r_d \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{R}{R_v}} \cdot \frac{4Kn p_\infty}{\alpha Sc p_{g\infty}}\right)} \quad (2.13)$$

$$J_q = \frac{k(T_d - T_\infty)}{r_d \cdot \left(1 + \frac{8Kn\bar{\kappa}}{(\bar{\kappa}-1)\Gamma Pr}\right)} \quad (2.14)$$

mit

$$\Gamma \approx \left( \frac{\kappa_v + 1}{\kappa_v - 1} \cdot \sqrt{\frac{R_v}{R}} \cdot \frac{p_{v\infty}}{p_\infty} + \frac{\kappa_g + 1}{\kappa_g - 1} \cdot \sqrt{\frac{R_g}{R}} \cdot \frac{p_{g\infty}}{p_\infty} \right) \quad (2.15)$$

und der Schmidt-Zahl  $Sc$  sowie der Prandtl-Zahl  $Pr$

$$Sc = \frac{\eta}{\rho D}, \quad Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda}. \quad (2.16)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems mit den drei Unbekannten  $T_d$ ,  $J_m$ , und  $J_q$  können die beiden obigen Beziehungen in einer dritten Gleichung über die Verdampfungsenthalpie miteinander verknüpft werden (Gleichung 2.17). Dabei wird die Tropfentemperatur nicht nur in Gleichung 2.14 eingesetzt, sondern muss auch bei der Berechnung des Dampfdruckes  $p_e(T_d, r_d)$  berücksichtigt werden.

$$J_q = \Delta h_v \Delta m J_m \quad (2.17)$$

Die Tropfengröße ergibt sich schließlich aus der Kontinuitätsgleichung (Gleichung 2.18).

$$\frac{dr_d}{dt} = \frac{-J_m}{\rho_d} \quad (2.18)$$

Um die Randbedingungen während der Kondensation laufend anpassen zu können, wird diese Gleichung mit endlichen Differenzen angenähert (Gleichung 2.19). Das heißt, der Zeitraum für den die Tropfenkondensation und -verdampfung berechnet werden soll, wird in kurze Zeitschritte eingeteilt und der Radius jeweils auf Basis der im vorhergehenden Schritt ermittelten Größe berechnet. Nach jedem Zeitschritt können die Randbedingungen wie der Partialdruck des Dampfes in der Umgebung oder die Umgebungstemperatur angepasst werden. Auf diese Weise ist auch die Berücksichtigung der Dampfaufzehrung oder die Aufheizung der Umgebung durch Aufnahme von Kondensationsenthalpie möglich. Der Verdampfungskoeffizient  $\alpha$  sei eins.

$$r_{dn+1} = r_{dn} - \frac{J_m}{\rho_d} \cdot \Delta t \quad (2.19)$$

## 2.2 Wärmeleitung

Das pex-tube ist keineswegs wärmedicht, das heißt nach der isentropen Expansion kann der unterkühlte Zustand nicht aufrecht erhalten werden. Die Temperatur der Metallwände des Zylinders, seiner Stirnfläche und die des Kolbens wird durch die Expansion nicht verändert. Unmittelbar nach der Expansion setzt daher ein Wärmestrom von den Umschließungsflächen in die Gasmischung ein, verringert die Unterkühlung und verdampft schließlich die kondensierten Tröpfchen. Dieser Wärmeeintrag erfolgt fast ausschließlich durch Wärmeleitung. Eine Konvektionsströmung bildet sich erst aus, wenn durch Wärmeleitung größere Temperaturunterschiede und damit relevante Dichteunterschiede gebildet wurden. Wärmestrahlung kann vernachlässigt werden, da die Gasmischung für IR-Strahlung durchlässig ist. Der Temperaturanstieg durch Wärmeleitung ist die wichtigste, nicht konstante Randbedingung des Tröpfchenwachstums, die in Gleichung 2.19 laufend angepasst werden muss. Dazu wird die Temperaturerhöhung durch Wärmeleitung orts- und zeitabhängig berechnet.

Grundlage der Lösung mehrdimensionaler, instationärer Wärmeleitprobleme ist die Differentialgleichung der Wärmeleitung (zum Beispiel [1, 19]), die hier ohne Berücksichtigung einer inneren Wärmequelle angeschrieben ist (Gleichung 2.20). Diese Gleichung behandelt das in dem pex-tube befindliche Gas wie einen festen Körper. Es kommt zu einem Fehler, da die lokale Dichteänderung des Gases bei Temperaturänderung sehr viel größer ist, als bei den üblichen Feststoffen. Diese Dichteänderung verursacht eine Verschiebung von Masseelementen während des Temperatúrausgleichs. Dieser Effekt bleibt in dieser Arbeit unberücksichtigt.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \Delta \vartheta \quad (2.20)$$

$a$  ist die stoffspezifische Temperaturleitfähigkeit (Gleichung 2.21).

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (2.21)$$

Der Laplacesche Operator  $\Delta$  ist vom Koordinatensystem abhängig. Da die Berechnungen für eine zylindrische Kammer durchgeführt werden, sind Zylinderkoordinaten (Abbildung 2.6) zweckmäßig. In diesem Fall geht Gleichung 2.20 in Gleichung 2.22 über.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \quad (2.22)$$

Die Gesamtmasse, die Wärmekapazität und die Wärmeleitfähigkeit der pex-tube Wandungen sind sehr groß im Vergleich zu den entsprechenden Werten des Gases, dass sich innerhalb des pex-tubes befindet. Darauf beruht die Annahme, dass sich die Temperatur der Zylinderumschließungsflächen während der ersten Sekunden nach der Expansion nicht relevant ändert. Man spricht im Zusammenhang mit Wärmeleitproblemen von Randbedingungen 1. Art.

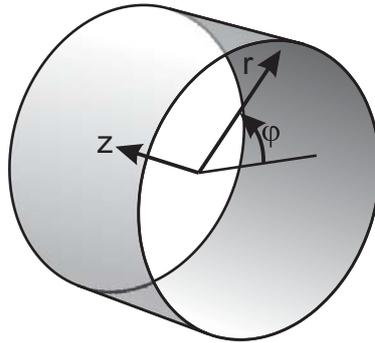


Abbildung 2.6: Zylinderkoordinaten.

### 2.2.1 Geschlossene Lösung der Wärmeleitgleichung

Die vollständige Differentialgleichung 2.22 kann nur in Ausnahmefällen analytisch gelöst werden. In der Regel wird zunächst versucht, die Gleichung für nur eine Raumkoordinate zu lösen. Mehrdimensionale Lösungen lassen sich oft durch Superposition der Lösungen einfacher Fälle gewinnen. Tautz [19] stellt eine umfangreiche Sammlung von Lösungen zur Verfügung. Er nutzt die Laplace-Transformation, um die für eine Raumkoordinate vereinfachten, partiellen Differentialgleichungen sowie deren Rand- und Anfangsbedingungen in gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen. Die Lösungen präsentieren sich in der Regel als unendliche Reihen, da zur einfacheren Rücktransformation die im Bildbereich gefundene Lösung in eine Taylor-Reihe entwickelt wird. Aus der Superposition der Lösungen für eine unendlich ausgedehnte, ebene Platte und einen unendlich langen Zylinder erhält man einen Zusammenhang für den endlich langen Zylinder, den Tautz für Randbedingungen 3. Art (vorgeschriebener Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  und konstante Umgebungstemperatur  $T_\infty$ ) angibt (Gleichung 2.23).

$$T(r, z, t) = T_{Anfang} + T_{Rand} \cdot \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n r/R)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))} \cdot e^{-\mu_n^2 at/R^2} \dots \right. \\ \left. \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \zeta_k \cdot \cos \zeta_k \cdot z/L}{\zeta_k + \sin \zeta_k \cdot \cos \zeta_k} \cdot e^{-\zeta_k^2 at/L^2} \right) \quad (2.23)$$

für  $0 \leq r \leq R$  und  $-L \leq z \leq +L$ .

Gleichung 2.23 geht in eine für Randbedingungen 1. Art gültige Beziehung über, wenn die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Eigenwerte  $\mu$  und  $\zeta$  verwendet werden (Gleichung 2.24). Die rechte Seite der Gleichungen ist für Randbedingungen 3. Art ungleich Null.

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = 0, \quad \cot \zeta = 0 \quad (2.24)$$

In den Gleichungen 2.23 und 2.24 sind  $J_0$  und  $J_1$  die Bessel- oder Zylinderfunktionen nullter und erster Ordnung.  $R$  ist der Zylinderradius und  $L$  die halbe Zylindertiefe. Für  $T_{Anfang}$  wird die Anfangstemperatur des expandierten Gases eingesetzt,  $T_{Rand}$  ist die konstante Temperatur der Umschließungsflächen.

Die Herleitung der oben vorgestellten Lösung wird von Tautz [19] detailliert gezeigt. Auf eine Wiederholung an dieser Stelle wird verzichtet, da die geschlossene Lösung im Zusammenhang mit den pex-tube Experimenten einen entscheidenden Nachteil hat: Bei der Kondensation der Tröpfchen erhöht sich die Temperatur zusätzlich zur Wärmeleitung durch freiwerdende Kondensationsenthalpie. Die Temperaturverteilung muss daher nach jedem Zeitschritt um diesen Betrag korrigiert werden. Das Gleiche gilt, bei umgekehrtem Vorzeichen, für die Verdampfungsphase. Bei der Berechnung des jeweils nächsten Zeitschrittes kann also nicht wieder mit den uniformen Anfangsbedingungen gestartet werden, sondern es muss auf Basis der korrigierten Temperaturverteilung des vorhergehenden Zeitschrittes weitergerechnet werden. Die Vorgabe eines Temperaturfeldes erlaubt Gleichung 2.23 nicht. Darüberhinaus ist es wünschenswert, die temperaturabhängigen Stoffwerte laufend anpassen zu können, statt Mittelwerte zu verwenden. Deshalb wird eine numerische Lösung der Wärmeleitgleichung gesucht. Die von Tautz angegebene, geschlossene Lösung eignet sich gut zur Überprüfung der Genauigkeit der numerischen Lösung.

## 2.2.2 Lösung mit dem Verfahren finiter Differenzen

Da die Randtemperatur auf der gesamten Zylinderoberfläche dieselbe ist, wird sich ein rotationssymmetrisches Temperaturprofil innerhalb des Zylinders bilden. Die Gastemperatur ändert sich somit nicht mit dem Winkel  $\varphi$ . Die Ableitung der Temperaturfunktion nach  $\varphi$ , der Temperaturgradient, ist damit Null. Daraus folgt, dass auch die zweite Ableitung  $\partial^2 \vartheta / \partial \varphi^2$  verschwindet. Der dritte Summand des Laplaceschen-Operators der Wärmeleitgleichung 2.22 kann somit gestrichen werden.

Die verbleibenden Ableitungen der Differentialgleichung können durch Differenzenquotienten ersetzt werden, die diese an diskreten Punkten approximieren.  $h$  sei die Schrittweite zwischen zwei diskreten Punkten, die Gitterweite genannt wird. Dann entspricht die Steigung oder Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  im Punkt  $a$  ungefähr der Steigung einer Geraden zwischen den Funktionswerten der Punkte  $a - h$  und  $a + h$ . Die Näherung der ersten Ableitung einer Funktion lautet somit  $f'(a) \approx (f(a + h) - f(a - h)) / 2h$ . Der rechte Teil dieser Gleichung wird zentraler Differenzenquotient genannt. Darüberhinaus können auch der hintere Differenzenquotient  $f'(a) \approx (f(a) - f(a - h)) / h$  und der vordere Differenzenquotient  $f'(a) \approx (f(a + h) - f(a)) / h$  definiert werden. Der zentrale Differenzenquotient der zweiten Ableitung kann, wie in Abbildung 2.7 dargestellt, aus der Differenz zweier zentraler Differenzenquotienten erster Ordnung in gedachten Zwischengitterpunkten  $a + h/2$  und  $a - h/2$  gebildet werden (Gleichung 2.25).

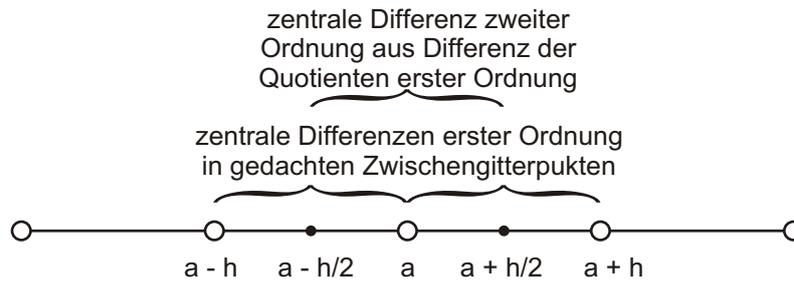


Abbildung 2.7: Bildung des Differenzenquotienten zweiter Ordnung aus zwei zentralen Differenzenquotienten erster Ordnung.

$$\begin{aligned}
 f''(a) &\approx \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a)-f(a-h)}{h}}{h} \\
 &= \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen erster Ordnung und nicht gemischte Ableitungen zweiter Ordnung – wie sie in der Wärmeleitgleichung vorkommen – werden analog behandelt, so dass Gleichung 2.20 in die Differenzengleichung 2.26 übergeht.

$$\begin{aligned}
 \frac{T(r, z, t + \Delta t) - T(r, z, t)}{\Delta t} = &\dots \\
 &a \cdot \left( \frac{T(r + \Delta r, z, t) - 2T(r, z, t) + T(r - \Delta r, z, t)}{\Delta r^2} \dots \right. \\
 &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{T(r + \Delta r, z, t) - T(r - \Delta r, z, t)}{2\Delta r} \dots \\
 &\left. + \frac{T(r, z + \Delta z, t) - 2T(r, z, t) + T(r, z - \Delta z, t)}{\Delta z^2} \right) \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Dabei werden, der jeweiligen Ableitung entsprechend, drei verschiedene Schrittweiten  $h$  eingeführt. Diese sind die örtlichen Gitterweiten  $\Delta r$  und  $\Delta z$ , sowie die zeitliche Schrittweite  $\Delta t$ . Die örtlichen Ableitungen werden durch zentrale Differenzen ersetzt. Für die Approximation der zeitlichen Ableitung wird der vordere Differenzenquotient gewählt. So gelingt es, dass der Wert  $T(r, z, t + \Delta t)$  der einzig unbekannte in der Gleichung ist. Dieser Vorteil wird mit der geringeren Genauigkeit des vorderen Differenzenquotienten gegenüber dem zentralen Differenzenquotienten erkaufte. Die Differenzengleichung lässt sich explizit nach  $T(r, z, t + \Delta t)$  auflösen, so dass die Temperaturen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  an jedem Gitterpunkt auf Basis der bekannten Werte des jeweils vorausgehenden Zeitpunktes  $t$  berechnet werden können. Man spricht von

einem expliziten Differenzenschema<sup>1</sup>.

Sehr viel übersichtlicher und aussagekräftiger präsentiert sich die Differenzengleichung 2.26 wenn man den rechten Teil der Gleichung in Form einer Schablone aufschreibt. Bei dieser Schreibweise wird die Lage des Gitterpunktes, auf den sich ein Wert stützt, nicht wie in Gleichung 2.26 in Klammern angegeben. Vielmehr werden alle Koeffizienten, die sich auf den selben Gitterpunkt stützen, zusammengefasst und in einer dem Berechnungsgitter nachempfundenen Schablone angeordnet. Die Zusammenfassung der Koeffizienten eines Gitterpunktes gelingt nur, wenn die Gitterweite  $h$  in Radius- ( $\Delta r$ ) und Zylinderachsenrichtung ( $\Delta z$ ) gleich groß gewählt wird:  $\Delta r = \Delta z = h$ . Jetzt kann der gemeinsame Faktor  $1/h^2$  ausgeklammert werden. Ausgehend vom Mittelpunkt  $r = z$  werden die zusammengefassten Koeffizienten an ihre Position in der Schablone wie beispielsweise  $r - \Delta r$  oder  $z + \Delta z$  geschrieben. Man erkennt an der Schablone (Gleichung 2.27) die Gewichtung der verschiedenen Gitterpunkte des Zeitpunktes  $t$ , die bei der Berechnung der Temperatur  $T(z, r, t + \Delta t)$  herangezogen werden.

$$T(r, z, t + \Delta t) = T(r, z, t) + a \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & \\ (1 - \frac{h}{2r}) & -4 & (1 + \frac{h}{2r}) \\ & 1 & \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

Das stärkste Gewicht liegt auf der Temperatur am selben Punkt. Die Gewichtung der Gitterpunkte parallel zur Zylinderachse unterscheidet sich erwartungsgemäß von der entlang des Radius. Die Faktoren an den Positionen  $r - h$  und  $r + h$  unterscheiden sich von den entsprechenden Faktoren in Achsenrichtung  $z - h$  und  $z + h$  allerdings nur durch den Summanden  $h/2r$ . Bei großen Radien  $r$  wird sich der Temperaturgradient entlang des Radius kaum von dem entlang der Zylinderachse unterscheiden, da der Summand bei wachsendem Radius schnell sehr klein wird.

Man denke sich ein Koordinatensystem in den Zylinder, dessen Ursprung auf der Mitte der Zylinderachse liegt. Die  $z$ -Achse liegt auf der Mittelachse, die  $r$ -Achse steht im rechten Winkel dazu und zeigt nach außen. Wegen der Symmetrie des Zylinders genügt es, nur einen Quadranten dieses Koordinatensystems zu berechnen, das gesamte Temperaturfeld geht durch Spiegelung aus den Ergebnissen des einen Quadranten hervor. Mit Gleichung 2.27 lassen sich keine Werte auf dem Rand des Ortsgitters berechnen. Bei den Außenrändern ist das kein Problem, sie sind durch die Randbedingung 3. Art vorgegeben. Die Gitterpunkte entlang der Koordinatenachsen müssen gesondert behandelt werden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten. Man kann den Temperaturverlauf über das bestehende Gitter hinaus extrapolieren und dann die Randgitterpunkte berechnen, oder man begnügt sich damit, nur die Randgitterpunkte zu extrapolieren. Bei den üblichen Temperaturverläufen und feinem Gitter macht man keinen großen Fehler, wenn den Randpunkten einfach der gleiche Wert wie den benachbarten, berechneten Punkten innerhalb des Gitters zugewiesen wird.

<sup>1</sup>Im Gegensatz zum expliziten Differenzenschema besteht die Lösung eines impliziten Differenzenschemas aus mehreren Werten, die in Form eines Gleichungssystems gegeben sind.

Man erkennt an der Kreuzform der Schablone, dass der zu berechnende Gitterpunkt im Zentrum nur mit den Gitterpunkten in Radius- und Achsenrichtung, nicht aber mit den diagonalen Punkten verknüpft ist. Das muss zu einer gewissen Richtungsabhängigkeit (Anisotropie) des Wärmeleitvorganges führen. Dieser Effekt wird numerische Dispersion genannt. Er verschwindet, wenn die Gitterweite  $h$  gegen Null strebt. Die Wahl einer geringen Ortsschrittweite kann daher wichtig sein.

Die Bewertung der Stabilität einer Differenzgleichung ist für ihre Verwendbarkeit von entscheidender Bedeutung. Gerade explizite Verfahren sind zwar einfach in der Handhabung, neigen aber weitaus häufiger zu instabilem Verhalten als implizite Systeme [10]. Die Stabilität eines Differenzgleichungssystems kann nach dem Stabilitätskriterium im Sinne John von Neumanns bewertet werden [10], erscheint in diesem Fall aber nicht einfach. Durch simples Probieren kann man finden, dass der Faktor  $a\Delta t/h^2$  in Gleichung 2.27 nicht größer als 0,25 sein darf, damit das System absolut stabil bleibt. Ist der Faktor größer als 0,25 wird die Gleichung sehr schnell völlig instabil. Dieser Faktor wird in der Literatur [1, 5] oft als Modul, hier mit dem Buchstaben  $p$  abgekürzt, bezeichnet. Wenn die örtliche Gitterweite vorgegeben wird, kann aus diesem Zusammenhang eine Bestimmungsgleichung für die Zeitschrittweite abgeleitet werden (Gleichung 2.28).

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{4a} \quad (2.28)$$

Gleichung 2.28 zeigt, dass eine feine Ortsgittereinteilung unter Umständen sehr kleine Zeitschritte notwendig macht. Es gilt einen Kompromiss zu finden, der eine ausreichende räumliche Auflösung bei vertretbarem Rechenaufwand bietet.

Beide Verfahren, das analytische und das numerische, werden zum Vergleich auf einen zwei mal zwei Zentimeter großen Stickstoffzylinder, der unter einem Druck von 100 kPa stehe, angewendet. Die Randtemperatur betrage 25 °C, die Gasanfangstemperatur liege 50 K darunter. Wenn entlang der halben Zylinderachse und auf dem Radius einschließlich der Randpunkte jeweils 21 Gitterpunkte verteilt werden, ergibt sich nach Gleichung 2.28 für eine Sekunde Gesamtberechnungszeit eine Mindestanzahl von 300 Zeitschritten. Abbildung 2.8 zeigt die Berechnungsergebnisse. Links im Bild ist das gesamte Temperaturfeld abgebildet. Darin wird das numerische Ergebnis mit Hilfe von Graustufen und das analytische durch Niveaulinien ausgedrückt. Rechts in der Abbildung sind die Werte entlang der mittleren Gitterlinien ( $z = 10$  und  $r = 10$ ) gegenübergestellt. Während die Ergebnisse am Zylinderrand sehr gut übereinstimmen, tritt in Richtung Zylindermittle ein zunehmend größerer Fehler auf, welcher am Mittelpunkt des Zylinders (Gitterpunkt [0,0]) 0,8 K bzw. 1,6 % beträgt. Der mittlere Fehler des gesamten Feldes beträgt 0,2 K oder 0,4 %. Man erkennt, dass schon bei einem Radius von nur 1 cm der Unterschied zwischen den Temperaturverläufen in Radius und Achsenrichtung wie erwartet sehr gering ist.

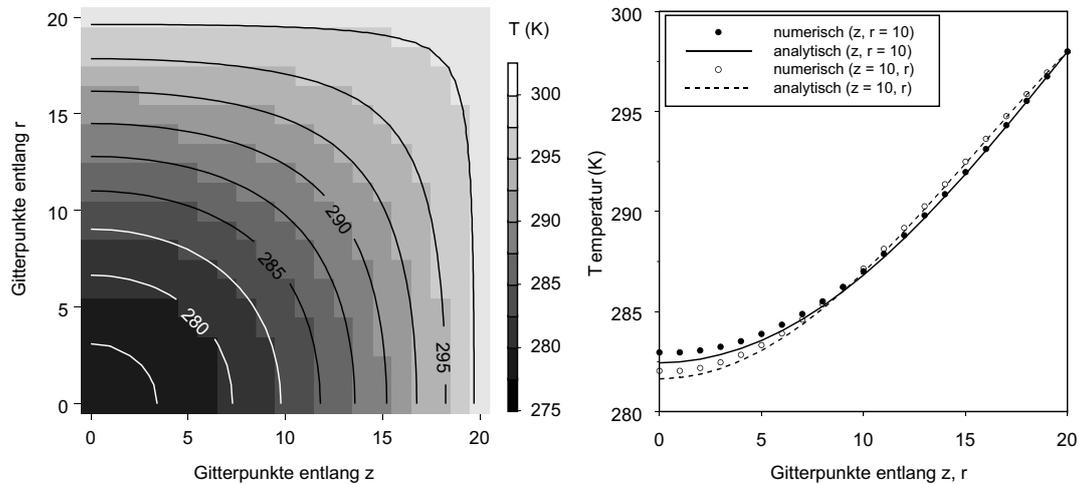


Abbildung 2.8: Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung der Wärmeleitgleichung am Beispiel eines Stickstoffzylinders. Links das Ergebnis für das gesamte Feld. Dabei ist das numerische Ergebnis durch Graustufen und das analytische durch Niveaulinien ausgedrückt. Rechts der Vergleich ausgewählter Gitterlinien entlang der z- und der r-Achse. Druck: 100 kPa, Randtemperatur: 298 K, Anfangstemperatur: 248 K.

### 2.3 Rückwirkung der Wachstumsgesetze auf die Wärmeleitung

In der Simulation muss die Wechselwirkung des Temperaturausgleichs mit den Wachstumsgesetzen berücksichtigt werden. Im Folgenden wird ein Überblick über die schrittweise Berechnung gegeben. Eine detailliertere Darstellung folgt im nächsten Kapitel. Zunächst wird mit dem Differenzenverfahren die durch Wärmeleitung veränderte Temperaturverteilung nach dem ersten Zeitschritt berechnet. Dann wird die Änderung der Tropfengröße ermittelt. Daraus ergibt sich bei bekannter Tropfenzkonzentration die während dieser Zeit verdampfte oder kondensierte Flüssigkeitsmenge. Die freiwerdende bzw. aufgenommene Verdampfungsenthalpie wird an die direkte Tröpfchenumgebung abgegeben, bzw. dieser entnommen. Da bei der Berechnung keine Einzeltropfen behandelt werden können, müssen alle Tropfen eines Punktes im Berechnungsgitter gleich behandelt und über diese gemittelt werden. Mit einem Punkt ist dabei ein Volumen gemeint, dessen Länge und Breite den Gitterweiten  $\Delta z$  und  $\Delta r$  entspricht. Die Koordinatenangabe des Gitterpunktes bezieht sich auf seinen Mittelpunkt. Die Größe eines Punktes nimmt wegen der Zylindergeometrie bei gleichmäßiger Gittereinteilung mit wachsendem Radius zu. Die Verdampfungsenthalpie aller Tröpfchen eines Gitterpunktes wird auf das gesamte Volumen eines Gitterpunktes verteilt, und führt zu einem Anstieg oder zu einem Abfall der Temperatur des Gitterpunktes. Die eingangs berechnete Temperaturverteilung wird um diesen Wert korrigiert. Natürlich muss an

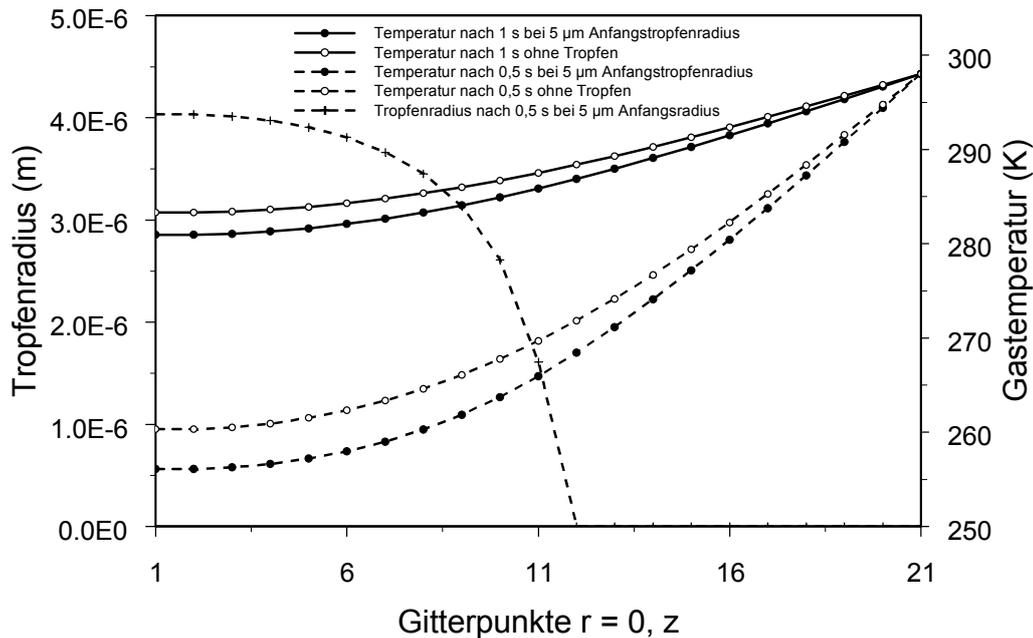


Abbildung 2.9: Vergleich der Temperaturverläufe bei Anwesenheit eines Tröpfchennebels mit den Temperaturverläufen innerhalb einer tröpfchenfreien Gasmischung. Zylinderdurchmesser: 2 cm; Länge: 2 cm

dieser Stelle auch der lokale Partialdruck der kondensierenden Komponente angepasst werden. Die Abgabe bzw. Aufnahme von Verdampfungsenthalpie setzt die Existenz eines Temperaturgradienten voraus, weshalb die Tropfentemperatur von der Umgebungstemperatur abweicht. Die Tropfentemperatur folgt aus der von der Massenstromdichte abhängigen Wärmestromdichte. Schließlich kann aus dem arithmetischen Mittel des Temperaturfeldes der Totaldruckanstieg gewonnen werden. Die Berechnung beginnt erneut für den nächsten Zeitschritt. Während jedes Berechnungsschrittes werden die Stoffwerte bei aktualisierten Randbedingungen neu ermittelt.

Abbildung 2.9 zeigt Temperaturverläufe innerhalb eines 2 mal 2 Zentimeter großen Stickstoffzylinders entlang der halben Mittelachse. Dabei befindet sich in dem Zylinder in einem Fall nur reines Trägergas (markiert mit leeren Kreisen), in dem anderen Fall befindet sich zusätzlich ein Tröpfchennebel darin (markiert mit gefüllten Kreisen). Die Temperaturverläufe sind jeweils für zwei Zeitpunkte in das Diagramm eingetragen. Einmal nach 1 s - die Tröpfchen sind bereits vollständig verdampft - und nach 0,5 s - jetzt besteht die ebenfalls in das Diagramm eingezeichnete Größenverteilung der Tröpfchen. In diesem einfachen Beispiel wird die Tröpfchenkondensation noch nicht betrachtet. Es werden lediglich die Auswirkungen eines Tröpfchennebels auf den Temperatureausgleich gezeigt.

Bei dem Größenverlauf fällt auf, dass die Tröpfchen zunächst sehr langsam kleiner werden, dann aber so plötzlich verdampfen, dass sich der Eindruck einer scharf

begrenzten, von außen nach innen in den Zylinder laufenden Verdampfungsfront einstellt. Der Temperaturverlauf gibt das plötzliche Verschwinden der Tröpfchen nicht wieder. Der einzige Unterschied zwischen den Temperaturverläufen ist der, dass die Temperatur bei Anwesenheit des Tröpfchennebels wegen der aufzubringenden Verdampfungsenthalpie generell niedriger ist, als ohne Tröpfchen. Die Differenz zwischen den Temperaturkurven nimmt mit der Zeit ab, da ein stärkerer Temperaturgradient den Wärmestrom begünstigt.

Der steile Verlauf der Tröpfchengröße in Abbildung 2.9 erklärt sich aus der Gleichung für die Massenstromdichte (Gleichung 2.13). In dessen Nenner steht der Tropfenradius  $r_d$ . Die Massenstromdichte steigt somit in Form einer gebrochenrationalen Funktion mit fallendem Radius. Daher ist eine stärkere als lineare Radiusabnahme möglich. Ein zweiter Effekt beschleunigt die Verdampfung bei kleinen Radien zusätzlich. Im Zähler der Gleichung für die Massenstromdichte steht der Gleichgewichtsdampfdruck über der gekrümmten Tropfenoberfläche  $p_e(T_l, R_d)$ . Dieser wächst nach der Kelvin-Gleichung 2.10 mit sinkendem Radius exponentiell gegen Unendlich. Entsprechend steigt die Massenstromdichte bei sinkendem Radius deutlich an.

Die Verdampfung findet hauptsächlich unmittelbar vor dem steilen Abfall der Radiuskurve in Abbildung 2.9 statt. In Bewegungsrichtung vor dieser Verdampfungsfront wurde der Gasmischung nur wenig Verdampfungsenthalpie entzogen. Die Gastemperatur ist dort durch den Entzug von Verdampfungsenthalpie kaum beeinflusst. Hinter der Verdampfungsfront, also dort wo die Tröpfchen bereits vollständig verdampft sind, wurde der Temperaturanstieg durch aufzuwendende Verdampfungsenthalpie deutlich gemindert. Warum bewirkt dieser Unterschied keine sichtbare Unregelmäßigkeit im Temperaturverlauf? Wärme strömt von der Wand her in den Zylinder, wobei ein Teil der Energie zur Verdampfung der Tropfen benötigt wird, und der andere Teil mit der Zeit einen Temperaturengleich bewirkt. Zur Temperaturerhöhung der Gasmischung wird dem Wärmestrom Energie entzogen, weshalb sich der Temperaturgradient ständig verringert und das Temperaturprofil gekrümmt ist. Im Bereich der Verdampfungsfront wird dem Wärmestrom zusätzlich zur Temperaturerhöhung Energie zur Bereitstellung der Verdampfungsenthalpie entzogen, was lokal zu einer stärkeren Krümmung des Temperaturprofils führen sollte. Bei dem insgesamt sehr niedrigen Propanolanteil ist die örtlich stärkere Verringerung des Temperaturgradienten nur sehr schwach und in Abbildung 2.9 nicht wahrnehmbar.

Im vorgegebenen Anfangszustand befinden sich Tröpfchen und Umgebung nicht im Gleichgewicht miteinander, da der Partialdruck des Propanols mit Null vorgegeben wurde. Während der ersten Rechenschritte stellt sich schnell ein Gleichgewichtszustand ein, indem etwas Propanol verdampft. Deshalb beträgt der Tröpfchenradius kurz vor der Verdampfung nur etwa  $4 \mu\text{m}$  statt der vorgegebenen  $5 \mu\text{m}$ . Durch Wärmeleitung werden die Tröpfchen erneut aus dem Gleichgewicht mit ihrer Umgebung gebracht und mit der Zeit verdampft.

# Kapitel 3

## Berechnungsprogramm

### 3.1 Programmierung

Abbildung 3.1 zeigt das prinzipielle Flussdiagramm des Berechnungsprogramms. Eine Reihe von Details wie zum Beispiel die Behandlung von Ausnahmen und untergeordnete Programmstrukturen, welche für den grundsätzlichen Ablauf der Berechnung nicht wichtig sind, werden zugunsten der Übersichtlichkeit fortgelassen. Die meisten der verwendeten Größen sind orts- und zeitabhängig. Auf die Kennzeichnung dieser Abhängigkeiten wird innerhalb des Diagramms ebenfalls verzichtet. Im Einzelnen wird die Berechnung in folgenden Schritten durchgeführt:

- Zuerst wird eine Reihe vom Benutzer vorgegebener Bedingungen eingelesen. Die wichtigsten dieser Angaben sind im obersten Feld des Diagramms 3.1 aufgeführt. Diese sind die Rand- und Anfangswerte für die Temperatur  $T(z, r, t_0)$ , der Keimradius  $r_d(t_0)$ , der Partialdruck der kondensierenden Komponente  $p_v(t_0)$  und der zuvor aus anderen Benutzerangaben zu ermittelnde Totaldruck nach Abschluss der isentropen Expansion  $p_t(t_0)$ .
- Aus der vom Benutzer vorgegebenen Zeitgitterweite und Berechnungsdauer bildet sich der Kopf der Schleife und seine Abbruchbedingung.
- Da nach der Berechnung nicht nur das Endergebnis, sondern der zeitliche Verlauf der Tröpfchenkondensation und -verdampfung betrachtet werden soll, müssen Zwischenergebnisse gespeichert werden. Der Zeitpunkt Null kann erfasst werden, wenn die Speicherung der Ergebnisse an erster Stelle der Schleife steht. Dabei sind Temperaturverteilung, Tropfenradius und Partialdruckverteilung orts- und zeitabhängig, der Totaldruck ist nur zeitabhängig.
- Mit dem Differenzenverfahren wird der Temperatursausgleich im Zylinder berechnet. Die Temperaturleitfähigkeit gilt bei der Temperatur am Anfang des Zeitschrittes.

- In diesem Schritt wird das Tropfenwachstum berechnet. Unter gewissen Randbedingungen kann es zu schlagartigen Änderungen des Partialdruckes der kondensierenden Komponente kommen. Um eine größere Genauigkeit und Stabilität zu erreichen, wird das Tröpfchenwachstum nicht bei dem Anfangspartialdruck des Dampfes, sondern bei einem mittleren Partialdruck ermittelt. Das erfordert eine gleichzeitige, iterative Berechnung von Radius- und Dampfdruckänderung. Kondensation bzw. Verdampfung finden rechnerisch bei der Tropfentemperatur am Anfang des Zeitschrittes statt. Die Berechnung des aktuellen Dampfdruckes nach Abschluss des Zeitschrittes erfolgt bei der Temperaturverteilung am Ende des Zeitschrittes, wobei die Temperaturänderung durch Verdampfungsenthalpie noch nicht berücksichtigt ist. Diese geringe Temperaturabweichung hat keinen feststellbaren Einfluss auf die Stoffwerte.
- Bei bekannter Tropfenkonzentration kann aus den Ergebnissen des letzten Rechenschrittes die Temperaturänderung der Gasmischung aus freigesetzter bzw. aufgenommener Verdampfungsenthalpie bestimmt und das Temperaturfeld entsprechend korrigiert werden.
- Die Berechnung der Tropfentemperatur folgt aus der Wärmebilanzgleichung 2.17. Die Tropfentemperatur taucht darin insgesamt fünf Mal auf. Sie kommt aus der Gleichung der Wärmestromdichte 2.14, steht in den Exponenten der Stoffwertgleichungen des Gleichgewichtsdampfdruckes über einer Flüssigkeit, der Dichte des Tropfens, der spezifischen Verdampfungsenthalpie und sie steht im Exponenten der Kelvin-Gleichung 2.10 (siehe auch Anhang A). Die Bilanzgleichung wird in die Form  $f(T_l) = 0$  gebracht und ihre Wurzel mit Hilfe des Sekantenverfahrens numerisch gefunden. Die im letzten Zeitschritt gefundene Tropfentemperatur eignet sich sehr gut als Startwert mit dem das Verfahren schnell konvergiert.
- Schließlich kann der mittlere Temperaturanstieg berechnet werden, der zu einem Anstieg der Drücke innerhalb des Zylinders führt. In einem letzten Schritt werden die Variablen des letzten Zeitschrittes mit den aktuellen Werten überschrieben und die Berechnungsschleife beginnt erneut.

In Kapitel 2.2.2 wurde deutlich, dass zur angemessen exakten Berechnung wegen der numerischen Dispersion ein nicht zu grobes Ortsgitter gewählt werden darf. Aus der Stabilitätsbedingung (Gleichung 2.28) folgt dann unter Umständen ein feines Zeitgitter. Wenn die Randbedingungen derart gewählt werden, dass die Wachstumsgesetze sehr schnelle Änderungen vorschreiben, muss die Zeitschrittweite eventuell noch kürzer gewählt werden, als von 2.28 vorgeschrieben wird. Solche Randbedingungen entstehen zum Beispiel bei hohen Tropfenkonzentrationen und geringer Tropfengröße. Diese Forderungen erhöhen den Rechenaufwand. Während eines Schleifendurchlaufs werden an zwei Stellen untergeordnete Schleifen durchlaufen, eine zur iterativen Berechnung des Tropfenradius, die andere zur Bestimmung der Tropfentemperatur mit dem Sekantenverfahren, womit sich der Rechenaufwand nochmals steigert.

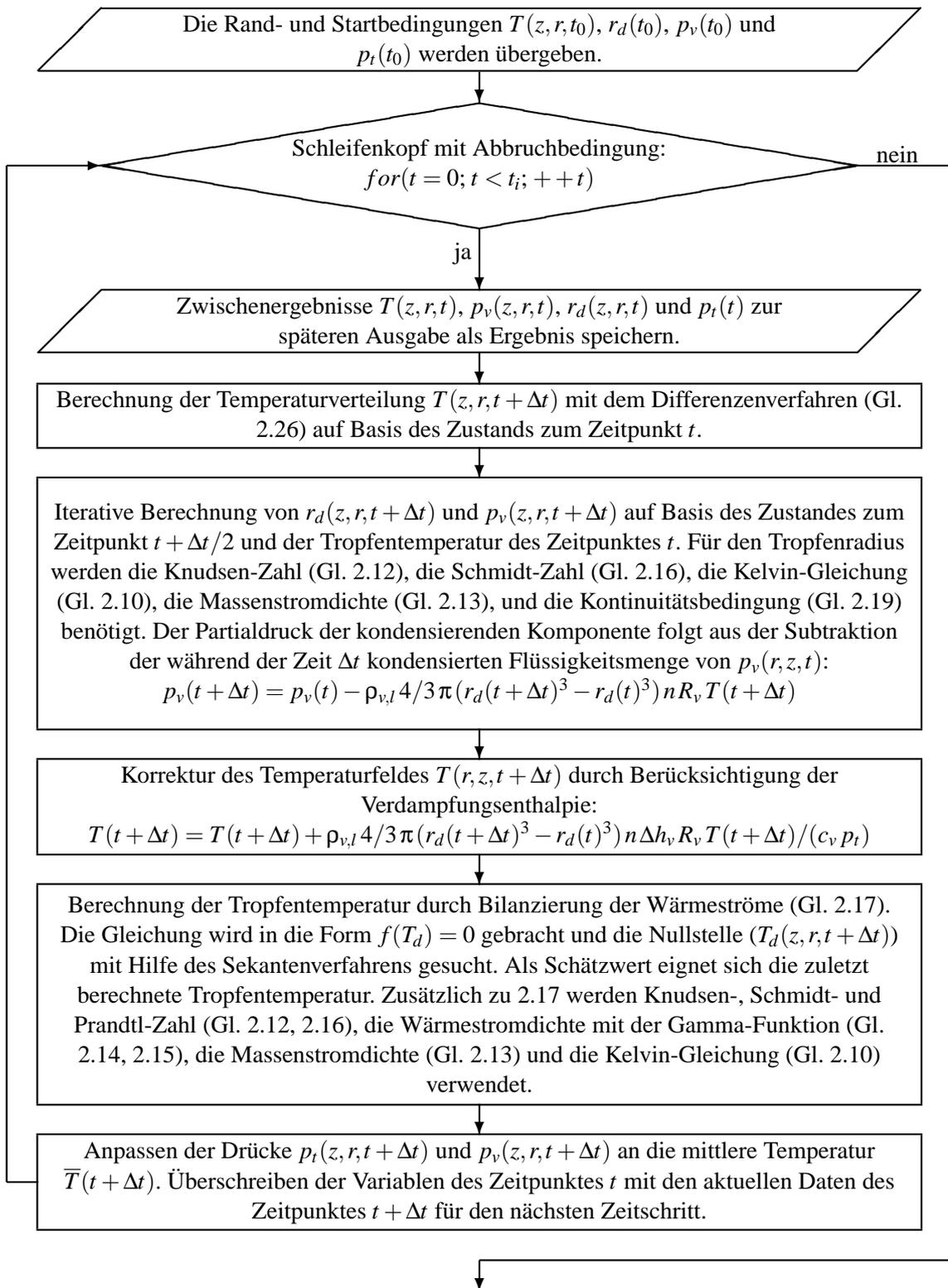


Abbildung 3.1: Flussdiagramm der Hauptschleife des Berechnungsprogrammes.

Grundsätzlich ist das Flussdiagramm 3.1 mit Hilfe von Computeralgebraprogrammen wie zum Beispiel Maple oder Mathcad abbildbar. In der Natur solcher Programme liegt allerdings, dass Operatoren und fertige Programmelemente zwar einfach zu handhaben sind, die Rechenzeit der innerhalb der Programmumgebung ausgeführten Operationen allerdings im Vergleich zu compilierten<sup>1</sup> Programmen sehr stark zunimmt. Wie viel Zeit tatsächlich eingespart werden kann ist schwer zu ermitteln, da die Rechenzeit sehr eng mit der Art der Programmierung oder der Zusammenstellung der Gleichungen innerhalb eines Computeralgebrasystems zusammenhängt. Ein Faktor zwischen 10 und 100 ist realistisch.

Die Wahl der Programmiersprache fällt auf Java 2. Die Programmiersprache ist konsequent objektorientiert. Alle benötigten Werkzeuge sind einfach und kostenlos zu beschaffen. Das gilt auch für die von der Firma Sun Microsystems angebotene, umfangreiche Klassenbibliothek. Das fertige Programm ist plattformunabhängig, das heißt es kann bei der vorhandenen Installation einer so genannten Laufzeitumgebung innerhalb aller gängigen Betriebssysteme ausgeführt werden. Daraus folgt die kleine Einschränkung, dass Java-Programme erst während der Laufzeit in ausführbaren Binärcode übersetzt werden, was mit einem Zeitnachteil verbunden ist. Für die wiederholte Ausführung der Berechnungsschleife (Abbildung 3.1) werden keine Nachteile erwartet.

Auf den Abdruck des Programmcodes wird verzichtet. Er befindet sich auf der beiliegenden CD-ROM. Der kommentierte Quellcode der Hauptklasse ist unter dem Namen *Drops.java* abgespeichert, er kann mit jedem einfachen Texteditor angesehen werden.

## 3.2 Dokumentation

Das Berechnungsprogramm kann auf nahezu jedem Computer mit einem modernen Betriebssystem gestartet werden. Die einzige Voraussetzung ist, dass eine Java Laufzeitumgebung<sup>2</sup> ab Version 1.3.1 installiert ist. Sie wird kostenlos auf den Internetseiten der Firma Sun Microsystems (<http://www.sun.de>) angeboten. Das Berechnungsprogramm hat die Form eines so genannten ausführbaren jar-Archivs. Das heißt, alle programmierten und in interpretierbaren Byte-Code übersetzten Klassen befinden sich gesammelt in einer Datei namens *drops.jar*. Sofern eine Java Laufzeitumgebung installiert ist, kann ein jar-Archiv wie jedes andere Programm gestartet werden. Dabei wird das Archiv von der Laufzeitumgebung interpretiert und betriebssystemabhängig in ausführbaren Binärcode übersetzt.

Die grafische Benutzeroberfläche des Programmes ist im oberen Teil der Abbildung 3.2 abgedruckt. Wird die Maus einen Moment lang über eine Beschriftung oder eine Schaltfläche gehalten, erscheint eine kurze Erläuterung auf dem Bildschirm wie

---

<sup>1</sup>compile engl. zusammenstellen, erstellen; hier: in die Maschinensprache einer Rechneranlage übersetzen

<sup>2</sup>Java Runtime Environment JRE

beispielsweise rechts in Abbildung 3.2 zu sehen ist. An dieser Stelle folgt die Beschreibung der Benutzeroberfläche:

**Iterationsschritte** In der ersten Zeile wird die *Gesamtdauer* der Simulation festgelegt. Als Zeitpunkt Null wird dabei das Ende der isentropen Expansion des pex-tubes definiert. In der zweiten Zeile wird die *Anzahl der Zeitpunkte*, einschließlich der Randpunkte angegeben. Die Anzahl der Zeitpunkte ist immer eins größer als die Anzahl der Zeitschritte. Oft finden zu Anfang der Simulation heftige Änderungen statt, während die Zustände sich im Verlauf und gegen Ende der Simulation nur noch verhältnismäßig langsam ändern. In diesem Fall bringt die Wahl einer *quadratischen Zeitachse* eine größere Genauigkeit und Stabilität bei unveränderter Schrittzahl.

**Geometrie** In diesem Bereich werden die Abmessungen des pex-tubes festgelegt. Mit der *halben Zylindertiefe* ist die Hälfte der Länge der Mittelachse des Zylinders gemeint. Sie spannt mit dem *Zylinderradius* ein Rechteck auf, welches einen Quadranten des Zylinders überstreicht. In diesem Bereich findet die Berechnung statt. Dabei werden Achse und Radius in ein Gitter eingeteilt, dessen *Knotenanzahl* in den beiden folgenden Zeilen gewählt wird. Die Knotenanzahl ist um eins größer als die Anzahl der Ortsschritte.

**Anfangstemperaturen** Die Temperaturen innerhalb des pex-tubes können bequem vor der Expansion gemessen werden. Sie sind in der Regel für die Gasmischung, die Mantelfläche und die Stirnseiten identisch.

**Gasart** Hier kann die Art des *Trägergases* und die Art der *kondensierenden Komponente* aus einer Liste gewählt werden. Entsprechend der Wahl werden die Stoffwerte nach Anhang A berechnet. Bei Abgabe dieser Arbeit werden nur Stickstoff, n-Propanol und Wasser angeboten, das Programm ist aber ohne großen Aufwand für andere Stoffe erweiterbar.

**Drücke** Die ersten beiden Zeilen definieren das Totaldruckverhältnis der isentropen Expansion. Beide Drücke werden im Experiment gemessen. Der *Druck nach der Expansion* ist der Druck nach Beendigung der Keimbildungsphase, ungeachtet eventuell auftretender niedrigerer Drücke während der Keimbildungsphase (siehe Kapitel 4). In die letzte Zeile wird der Partialdruck der kondensierenden Komponente vor der Expansion eingetragen. Sie ist im Experiment bekannt, wenn in die evakuierte Anlage zuerst nur die kondensierende Komponente eingefüllt wird. Der leicht messbare Totaldruck ist dann identisch mit dem Partialdruck.

**Kondensation** Der genaue *Radius des Keims* hat keinen Einfluss auf das Rechenergebnis, solange er nur klein im Vergleich zu den erwarteten Tröpfchen ist. Es ist nicht nötig den kritischen Keimradius  $r^*$  mit der Kelvin-Gleichung 2.10 zu berechnen und einzusetzen. Die *Keimkonzentration* kann im Experiment durch Zählen der Tröpfchen in einer Fotografie des Experiments bestimmt werden. Sie wird in der Regel zwischen  $1 \cdot 10^8$  und  $1 \cdot 10^{11}$  Keime pro Kubikmeter eingestellt. Wird das Kästchen *Verdampfungswärme beachten?* ausgewählt, so wird die Korrektur des Temperaturfeldes durch Berücksichtigung der Verdampfungsenthalpie durchgeführt.

Der untere Teil des Hauptfensters beschäftigt sich mit der Ausgabe und Anzeige der Ergebnisse. Da auch der zeitliche Verlauf der Kondensation und Verdampfung

**Drops 1.0**

Iterationsschritte  
 Gesamtdauer [s]: 0.8  
 Anzahl der Zeitpunkte: 1001  
 quadratische Zeitachse?

Gasart  
 Trägergas: Stickstoff  
 kondensierbarer Stoff: n-Propanol

Geometrie  
 halbe Zylindertiefe Z [m]: 0.01  
 Zylinderradius R [m]: 0.01  
 Knotenanzahl entlang Z: 21  
 Knotenanzahl entlang R: 21

Anfangstemperaturen  
 Gas vor der Expansion [K]: 298  
 Stirnflächen [K]: 298  
 Mantelflächen [K]: 298

Drücke  
 Druck vor der Expansion [Pa]: 1.0E5  
 Druck nach der Exp. [Pa]: 0.55E5  
 kond. Stoff vor der Exp. [Pa]: 0.01E5

Kondensation  
 Keimradius nach der Exp. [m]: 100E-9  
 Keimkonzentration [1/m<sup>3</sup>]: 1E10  
 Verdampfungswärme beachten?

alle x Zeitpunkte speichern: 10  
 Berücksichtigt die Temperaturänderung durch Verdampfungsenthalpie der Tröpfchen.

**Berechnung starten** 100% Modul p = 0,123586

Temperaturfeld anzeigen: 101  
 Temperaturfelder speichern: C:\  
 Wachstumsverlauf:  
 am Gitterpunkt r = 0  
 und z = 4

Größenfeld anzeigen: 101  
 Größenfelder speichern: C:\  
 Stoffwert der Mischung anz.: spez. Wärme bei p = konst.  
 Druckverlauf  
 Druckverlauf speichern als: C:\druck.bt  
 Tropfentemperatur  
 Speichern als: C:\tropfentemperatur00.bt

Einstellungen speichern als: C:\einstellungen.bt  
 Info zum Programm

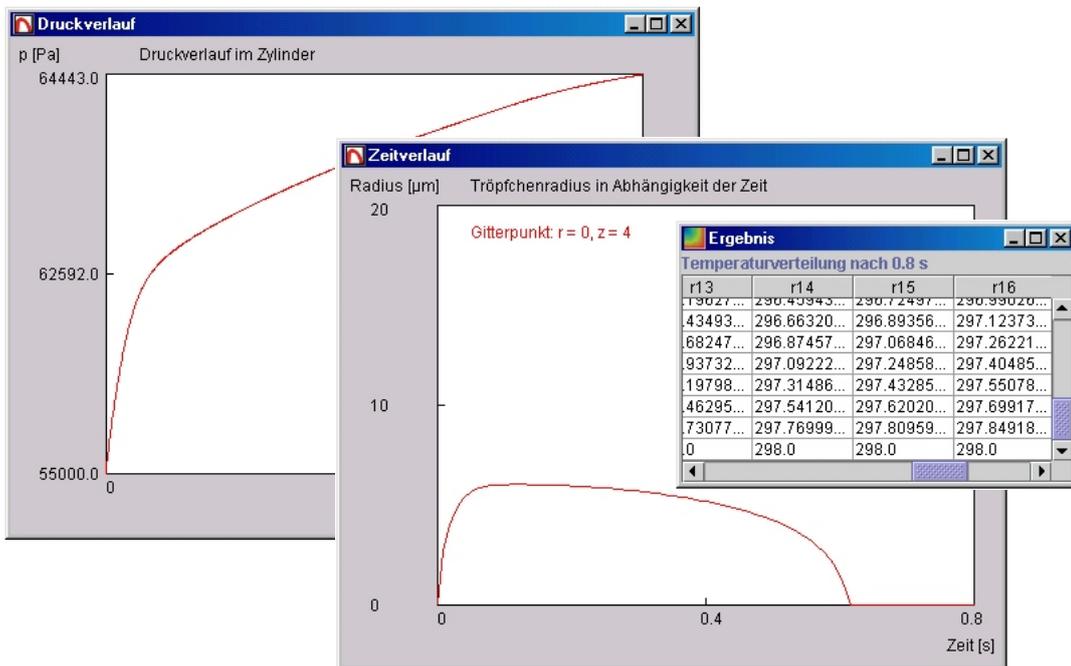


Abbildung 3.2: Grafische Benutzeroberfläche des Berechnungsprogrammes zur Tröpfchenkondensation und -verdampfung.

untersucht werden soll, müssen Zwischenergebnisse gespeichert werden. Bei begrenztem Arbeitsspeicher kann nicht jeder Zeitschritt mit seinen nur graduellen Änderungen abgespeichert werden. In der Zeile *alle x Zeitpunkte speichern* kann diese Anzahl begrenzt werden. Darunter befindet sich die Schaltfläche *Berechnung starten* mit der die Simulation gestartet wird, dessen Fortschritt anhand der Anzeige neben der Schaltfläche beobachtet werden kann. Unterhalb der Fortschrittsanzeige kann ein beliebiges Zwischenergebnis für den Temperaturverlauf ausgewählt und durch Drücken der Schaltfläche *Temperaturfeld anzeigen* in Form einer Tabelle sichtbar gemacht werden. Eine solche Tabelle ist in Abbildung 3.2 rechts unten zu sehen. Die Schaltfläche *Temperaturfelder speichern*: schreibt alle Temperaturfelder des Arbeitsspeichers in den rechts neben der Schaltfläche angegebenen Ordner. Da die Dateinamen automatisch erzeugt werden, ist hier nur der Verzeichnispfad anzugeben. Die Dateinamen setzen sich aus einem *T*, einer laufenden Nummer und der Endung *.txt* zusammen. Es handelt sich dabei um tabulatorgetrennte Text-Dateien im ASCII-Format. Die Schaltflächen *Größenfeld anzeigen* und *Größenfeld speichern* haben eine analoge Bedeutung wie die entsprechenden Schaltflächen der Temperaturfelder. Die Dateinamen beginnen in diesem Fall mit einem *R*. Die Schaltfläche *Wachstumsverlauf* zeigt den Tröpfchenradius eines Gitterpunktes zeitabhängig an (unterste Grafik in Abbildung 3.2. Der Gitterpunkt kann in den beiden Textfeldern schräg unter der Schaltfläche ausgesucht werden. In der nächsten Zeile kann der Wachstumsverlauf als Text-Datei gespeichert werden. Der automatisch erzeugte Dateiname enthält Informationen über die gewählte Ortskoordinate. Die letzte Schaltfläche speichert die Benutzereingaben des oberen Programmbereichs unter dem rechts daneben angegebenen Dateinamen im Text-Format.

Rechts neben der Fortschrittsanzeige befindet sich der Schriftzug *Modul  $p =$* . Als Modul *p* wird der in Kapitel 2.2.2 besprochene Faktor aus Gleichung 2.27 bezeichnet. Er dient dem Benutzer als Anhaltspunkt, ob eine angemessene Zeitschrittweite gewählt wurde. Er darf für eine stabile Berechnung keinesfalls größer als 0,25 werden. Bei hohen Keimkonzentrationen sollte er deutlich darunter liegen. Bei zu kleinem Modul *p* wird der Rechenaufwand größer als notwendig. Mit den verbleibenden Schaltflächen rechts unten im Hauptfenster lassen sich Stoffwerte, Totaldruckverlauf und die Entwicklung der Tröpfchentemperatur grafisch anzeigen. Der Totaldruckverlauf und die Tröpfchentemperatur können im Text-Format unter den angegebenen Dateinamen gespeichert werden.

# Kapitel 4

## Das pex-tube Experiment

Übersättigte Zustände, wie sie in diesem Experiment gefordert werden, können durch die plötzliche Expansion einer gesättigten oder untersättigten Gasmischung herbeigeführt werden (Abbildung 2.1). Prinzipiell genügt es, die Gasmischung zunächst innerhalb eines geeigneten Behälters zu komprimieren, so dass der Totaldruck der Gasmischung höher als der Umgebungsdruck ist. Dieser Behälter wird mit einer dünnen Membran, mit der Eigenschaft bei Verletzung großflächig wegzuplatzen, verschlossen. Nach der Zerstörung der Membran eines so genannten Stoßwellenrohres stellt sich allerdings eine unter Umständen sehr komplizierte Zustandsänderung ein. Die Experimente sind aufwändig, da die Gasmischung bei dem Versuch verloren geht und der Behälter mit Umgebungsluft verunreinigt wird. Besser ist es, die Experimente in einem geschlossenen Behälter mit Hilfe einer Kolbenexpansion durchzuführen, wobei der Kolben zunächst sehr stark beschleunigt und im Anschluss extrem stark verzögert werden muss. Wenn der Kolben reibungsarm über die Behälterwand gleitet, kann Dissipation an dieser Stelle vernachlässigt werden. Spätestens nachdem der Kolben zum Stillstand gekommen ist, wird in der expandierten Kammer Dissipation durch abklingende Druckwellen auftreten. Dieses Problem kann mit einem von Peters und Mayer [13] entwickelten pex-tube umgangen werden. Der Kolben wird dabei an einer Stange geführt, mit der man die Volumenänderungsarbeit aus dem expandierten Volumen abführt. Wie im Anhang B.2 gezeigt ist, handelt es sich dabei um eine isentrope Expansion [12]. Für die Zustandsänderungen gelten dann die einfachen Isentropengleichungen.

Die aufs Wesentliche reduzierte Darstellung in Abbildung 4.1 veranschaulicht den Aufbau des pex-tubes wie es im Rahmen dieser Arbeit genutzt wurde. Rechts befindet sich die Expansionskammer mit der Dampf-Trägergas Mischung. Die Kammer hat eine gewisse Zahl von Öffnungen, die dem Austausch des Gasgemisches, der Beleuchtung und der Druckmessung dienen. Die Anschlüsse erfolgen derart, dass möglichst wenig Volumen außerhalb der Zylindergeometrie expandiert wird. Durch die entspiegelte Frontscheibe lassen sich die Vorgänge im Inneren der Kammer beobachten.

Links befindet sich die Treibseite des pex-tubes. Sie wird mit einer Folie aus 0,3 mm starkem PE verschlossen. Durch die im oberen Teil der Abbildung angedeuteten

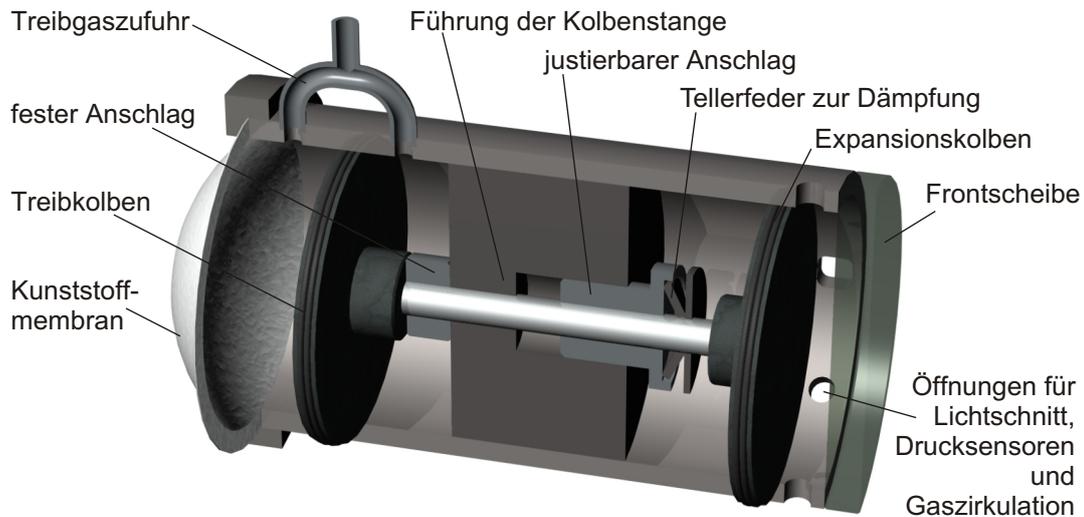


Abbildung 4.1: Vereinfachte Schnittdarstellung des verwendeten pex-tubes. Der Rohrendurchmesser beträgt 35 mm. Die Expansionskammer hat eine Tiefe von 21 mm nach der Expansion, wobei dieses Maß mit Hilfe des justierbaren Anschlags verändert werden kann.

Leitungen werden beide Seiten des Treibkolbens gleichmäßig mit Treibgas bei einem Druck von etwa 100 bis 150 kPa über Atmosphäre beaufschlagt. Bei Zerstörung der Membran schnellen der Treibkolben und der mit ihm verbundene Expansionskolben nach links, bis der Expansionskolben am justierbaren Anschlag gestoppt wird. Dabei wird der Impuls des Kolbens von einer Tellerfeder aufgefangen, welche den Kolben bei Entlastung ein kurzes Stückchen zurück schiebt. Dadurch entsteht eine schwache Re-kompression, wodurch sich ein scharf begrenztes Ende der Keimbildungsphase ergibt. Da die verbindende Treibgasleitung einen sehr geringen Durchmesser hat, ist es nicht nötig diese vor der Expansion zu verschließen. Der zugehörige Druckverlauf innerhalb der Expansionskammer ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Der Kolben benötigt für einen Weg von 9 mm Länge eine Zeit von etwa 3,6 ms. Damit folgt eine mittlere Kolbengeschwindigkeit von 2,5 m/s. Dieser Wert ist im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit sehr klein, so dass die Bildung eines Expansionsfächers ausgeschlossen ist.

Durch eine mit entspiegeltem Glas verschlossene Öffnung wird das Innere der Kammer entlang der waagerechten Radiuskoordinate beleuchtet. Als Lichtquelle dient ein Laser, dessen Lichtbündel zu einer 5 mm hohen und 0,5 mm dicken Lichtebe-  
 geformt wird. Die Lichtebe-  
 befindet sich 2 mm außerhalb der Mitte des expandierten Zylinders. Mit einer digitalen Hochgeschwindigkeitskamera, dessen optische Achse parallel zur Mittelachse des Zylinders ausgerichtet ist, wird der Kondensationsvorgang und die Verdampfung der Tröpfchen beobachtet. Dabei bildet ein Makroobjektiv einen Bildausschnitt von 8,5 mm Seitenlänge auf den 512 x 512 Pixel großen CCD-Chip<sup>1</sup> der

<sup>1</sup>engl. charge-coupled device, hier: lichtempfindlicher Sensor Chip

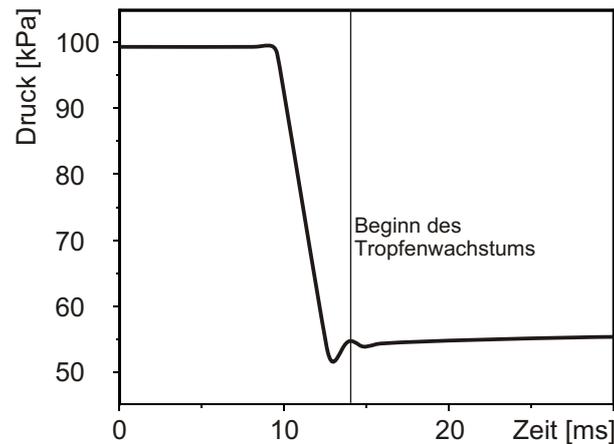


Abbildung 4.2: Druckverlauf während der Expansion des pex-tubes.

Kamera ab. Die Kamera kann parallel zum Lichtschnitt auf einer Traverse verschoben werden.

In die Zylinderwandung ist ein Piezo-Druckaufnehmer eingelassen, mit dem der Druckverlauf während der Expansion beobachtet wird (siehe Abbildung 4.2).

Über zwei weitere Anschlüsse ist das pex-tube zusammen mit einem großen Vorratsbehälter in einen Kreislauf geschaltet. Die Anschlüsse sind mit zwei Ventilen absperrbar. Um das Volumen, welches sich wegen der Ventilkonstruktion außerhalb der Zylindergeometrie befindet, zu reduzieren, wurden eigens spezielle Ventile entwickelt. Mit Hilfe einer Membranpumpe wird das Gas vor jedem Versuch durch die Anlage zirkuliert. Damit wird sichergestellt, dass sich keine nicht vollständig verdampften Kondensationskeime mehr in dem pex-tube befinden.

# Kapitel 5

## Ergebnisse

### 5.1 Experiment

Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf folgende Randbedingungen: In das evakuierte pex-tube und den ebenfalls evakuierten Vorratsbehälter werden bei einer Temperatur von 299 K 628 Pa n-Propanol eingelassen. Dann wird die Anlage bis auf einen Totaldruck von 99.6 kPa mit Stickstoff aufgefüllt. Nach der Expansion beträgt der Totaldruck innerhalb des pex-tubes noch 54.6 kPa (Abbildung 4.2). Der Zylinder ist nach Abschluss der Keimbildungsphase 21 mm lang. Mit der Höhe des Treibdrucks kann die Tiefe der Kerbe im Druckverlauf (Abbildung 4.2) variiert werden. Ein erhöhter Treibdruck führt zu einer erhöhten Keimbildungsrate. Das Experiment wurde für zwei verschiedene Keimbildungsraten durchgeführt und mit einer Bildfrequenz von 500 Hz mit der Hochgeschwindigkeitskamera aufgezeichnet.

Abbildung 5.1 zeigt zwei Bildausschnitte die den Hochgeschwindigkeitsfilmen entnommen wurden. Beide Aufnahmen entstanden 0,1 s nachdem die ersten Tröpfchen abgebildet wurden. Sehr kleine Tröpfchen kann die Digitalkamera nicht erfassen. Die Wachstumsphase bis zu den in Abbildung 5.1 wiedergegebenen Zuständen ist daher länger als 0,1 s. Da die Kondensation extrem schnell abläuft, ist dieser Zeitunterschied jedoch sehr gering.

In der linken Aufnahme wird die Tröpfchenkonzentration durch Zählen mit  $8 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$  bestimmt. In der rechten Aufnahme ist die Keimkonzentration sehr viel größer. In Kapitel 2.1.3 wurde bereits darauf hingewiesen, dass Ehrler [3] zufolge in technischen Apparaten Tröpfchenkonzentrationen von über  $10^{12} \text{ m}^{-3}$  nicht im Sekundenbereich aufrechterhalten werden können. Schätzungsweise ist die Keimkonzentration im zweiten Experiment zunächst weitaus höher als  $10^{12} \text{ m}^{-3}$  und nimmt dann im Verlauf des Experiments sehr schnell ab. Überschlägig wird eine Tropfenkonzentration von  $5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$  angenommen. Das zweite Experiment kann nur als qualitative Vergleichsmöglichkeit dienen, da außer der unbekanntem Tropfenkonzentration, den Wachstumsgesetzen zugrunde liegende Annahmen verletzt sind. Zum Beispiel kann die gegenseitige Beeinflussung der Tröpfchen nicht mehr ausgeschlossen werden.

Die Abszisse in Abbildung 5.1 zeigt, dass die Aufnahmen in unmittelbarer Nä-

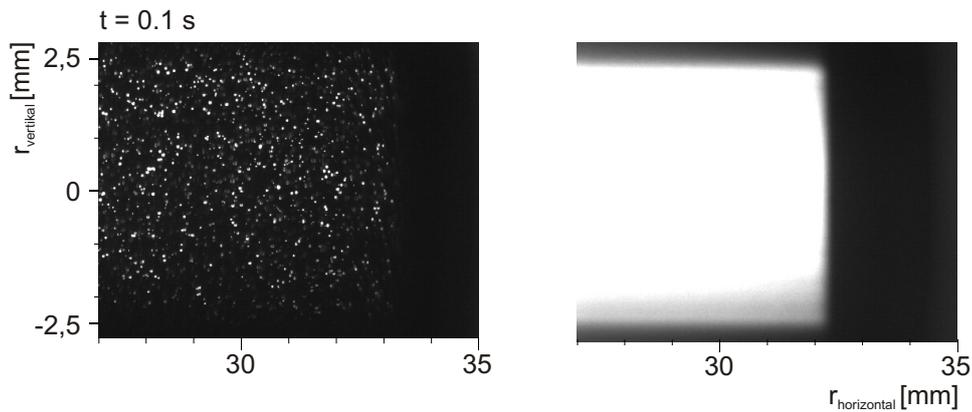


Abbildung 5.1: Ausgewählte Bildausschnitte der Experimentaufzeichnung. Keimkonzentration links:  $8 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$ ; Keimkonzentration rechts: etwa  $5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ . Der Lichtschnitt liegt bei  $z = -2 \text{ mm}$ .

he des Zylindermantels gemacht wurden. Wie bereits in Kapitel 2.3 berechnet wurde, stellt sich eine sichtbare, scharf begrenzte Verdampfungsfront ein. Bei der Betrachtung des gesamten Filmes, fällt auf, dass die Tröpfchen nicht wie bei Programmierung des Problems vereinfachend vorausgesetzt wurde, in Ruhe bleiben. Dies gilt nur für die ersten Millisekunden, dann setzt sich eine zunächst langsam rotierende und sich später sehr störend auswirkende Konvektionswalze in Bewegung. Um die Konvektion auch in der Druckversion dieser Arbeit sichtbar zu machen, wurden dem Film zwei Aufnahmen entnommen und einer PIV-Auswertung<sup>1</sup> unterzogen. Der Auswertung liegt die linke Aufnahme aus Abbildung 4 und ein 10 ms später aufgenommenes Bild zugrunde. Die Auswertefenstergröße beträgt 32 Pixel, ohne Überlappung. Die maximale Verschiebung liegt bei 9 Pixeln. Das Ergebnis der Auswertung zeigt Abbildung 5.2. Die größten Geschwindigkeiten werden in Wandnähe vermutet, da der Temperaturgradient dort am stärksten ist. Das ist in der Auswertung natürlich nicht sichtbar, da die als Tracer-Partikel benötigten Tröpfchen dort bereits verdampft sind.

## 5.2 Simulation

Für die Gesamtsimulationsdauer wird 1 s gewählt, da die Tröpfchen innerhalb dieser Zeit vollständig verdampfen und somit ihr gesamter Lebenszyklus beobachtet werden kann. Die Ortsgitterweite wird mit 0,5 mm festgelegt, woraus sich 22 Gitterpunkte entlang der halben Zylinderachse und 71 Gitterpunkte entlang des Radius ergeben. Mit insgesamt 1000 Zeitschritten ergibt sich das Modul  $p$  (siehe dazu Kapitel 2.2.2 und 3.2 oder Gleichung 2.28) zu  $0,16 < 0,25$  womit stabiles Verhalten der Rechnung

<sup>1</sup>PIV engl. particle image velocimetry. Auswertung mit der am Lehrstuhl entwickelten Software EDPIV.

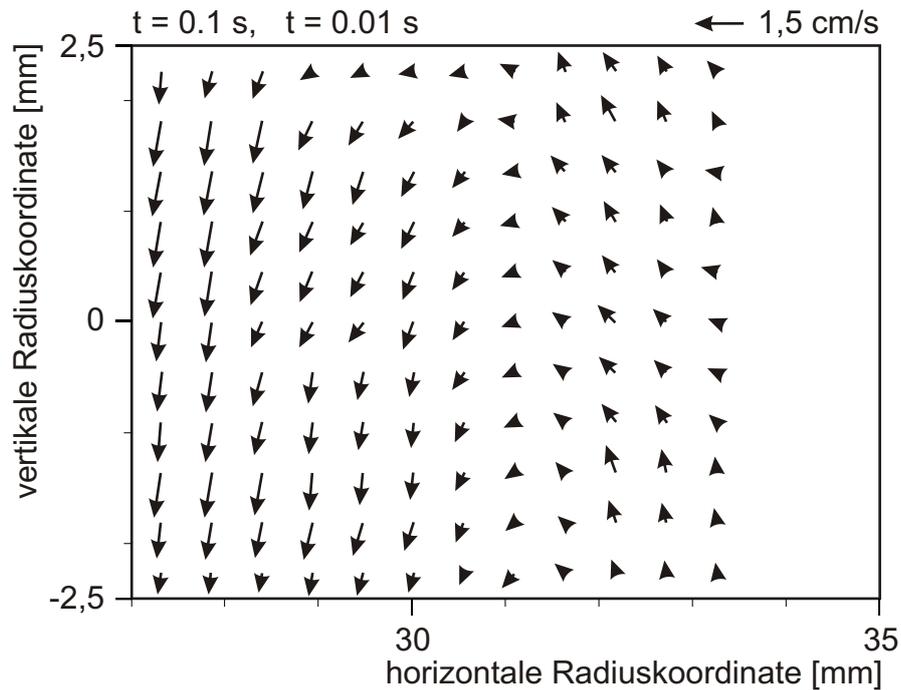


Abbildung 5.2: PIV-Auswertung zweier Aufnahmen in Wandnähe.

erwartet wird. Ein Zwischenergebnis der Berechnung nach 0,3 Sekunden für Temperaturverlauf und Tröpfchenradius zeigt Abbildung 5.3. Der Aufnahmeort der Fotografien aus Abbildung 5.1 bei  $27 \text{ mm} < r < 35 \text{ mm}$  und  $z = 2 \text{ mm}$  ist mit einer Linie größerer Strichstärke gekennzeichnet. Auch in dieser Darstellung fällt die Ausbildung der steilen Verdampfungsfront entlang der 273 K Isothermen auf.

### 5.3 Vergleich von Experiment und Berechnung

An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie gut die Simulation das Experiment reproduzieren kann. Die Youngschen Wachstumsgesetze (Gleichungen 2.13 bis 2.19) wurden bereits von Peters und Paikert [15] und Rodemann [18] verifiziert. Es wird ein Vergleichskriterium benötigt, welches insbesondere den Einfluss der Wärmeleitung einschließt. In den digitalen Aufnahmen kann, besonders während der ersten 30 ms, die Verdampfungsfront sehr gut beobachtet und ihr Ort vermessen werden. Abbildung 5.4 gestattet den direkten Vergleich des Experiments mit der Simulation.

Die unterste Reihe von Grafiken der Abbildung 5.4 enthält den Tröpfchenradius beider in den oberen Reihen dargestellten Experimente. Die mit gefüllten Punkten markierte Kurve bezieht sich dabei auf das Experiment mit der niedrigen Tropfenkonzentration und auf die linke Ordinate, während die mit Kreisen markierte Kurve sich auf das Experiment mit der hohen Keimkonzentration und die rechte Ordinate bezieht.

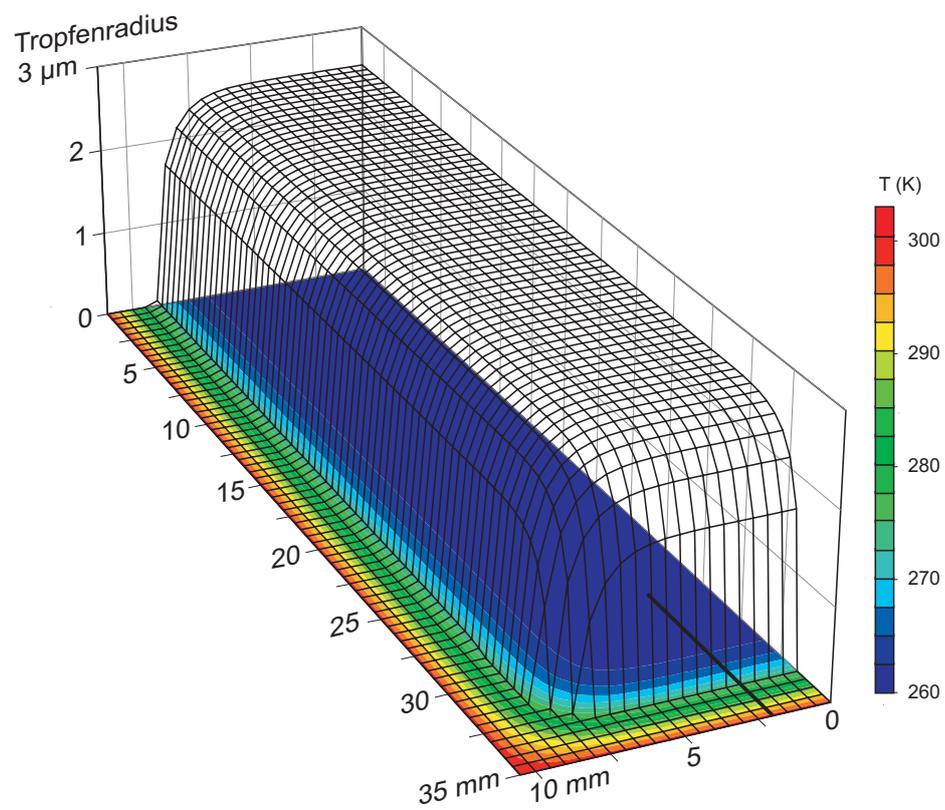


Abbildung 5.3: Grafische Darstellung des Simulationsergebnisses nach 0,1 s.

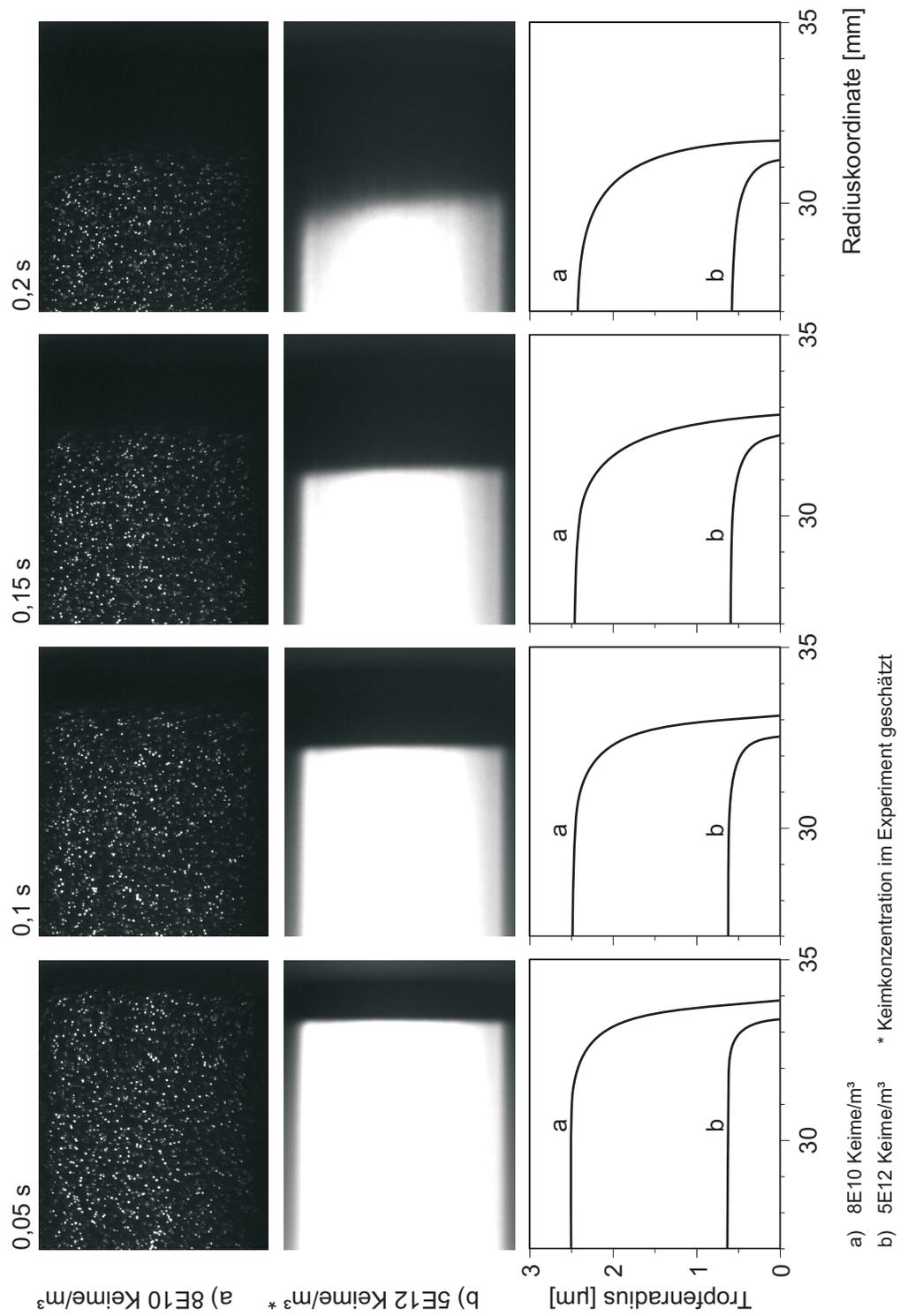


Abbildung 5.4: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den optischen Fronten der Experimente.

Die Simulation stimmt bis 0,15 Sekunden nach Ende der Keimbildungsphase sehr gut mit den Experimenten überein. Danach wird im Experiment, durch die an Einfluss gewinnende Konvektion, mehr Wärme als berechnet eingetragen. Nach 0,3 Sekunden beginnt die Konvektion die Wärmeübertragung zu bestimmen und die Randbedingungen der Simulation verlieren ihre Gültigkeit.

Interessant ist, dass die Geschwindigkeiten der Verdampfungsfronten trotz unterschiedlicher Tröpfchenkonzentrationen gleich sind. Dabei hat die Front in dem Versuch mit der hohen Tropfenkonzentration einen konstanten Vorsprung. Die optisch sichtbare Front erscheint an der Stelle, an der die Tröpfchen eine Größe erreichen, bei der sie von der Kamera nicht mehr abgebildet werden. Die Verdampfung beginnt zu einem früheren Zeitpunkt, welcher allein von der Wärmeleitung bestimmt wird. Da die Gaszusammensetzung in beiden Experimenten nicht voneinander abweicht und auch alle anderen thermischen Randbedingungen identisch sind, setzt die Verdampfung in beiden Experimenten an einem bestimmten Ort zur selben Zeit ein. Dabei verdampfen die kleinen Tropfen natürlich schneller als die großen, so dass die sichtbaren Fronten zur selben Zeit an unterschiedlichen Orten erscheinen, obwohl ihre Geschwindigkeiten gleich sind.

## 5.4 Diskussion am Beispiel weiterer Berechnungen

Im Gegensatz zum Experiment hat die Simulation den enormen Vorteil, dass verschiedene Vorgänge wie Temperatenausgleich, Tröpfchengröße und auch die Tröpfchentemperatur zu jeder Zeit und an jedem Ort bekannt sind und miteinander verglichen werden können. Das lässt sich im Experiment auch mit großem technischen Aufwand nicht realisieren. Auch wenn die quantitative Abweichung der Berechnung vom Experiment mit zunehmender Konvektion wächst, so erleichtern die qualitativ richtigen Aussagen das Verständnis der Tropfenkondensation und Verdampfung. Als Beispiel diene Abbildung 5.5, in der Tropfentemperatur, Gastemperatur und Tropfenradius am Mittelpunkt des Zylinders in Abhängigkeit der Zeit in einem Diagramm miteinander verglichen werden können. Die Daten stammen aus der oben beschriebenen Berechnung bei einer Tropfenkonzentration von  $8 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$  und einem Anfangsdampfdruck von 628 Pa.

Die Tropfentemperatur nimmt beim Start der Rechnung einen Wert an, der die Abfuhr der Kondensationswärme an die Umgebung ermöglicht. Mit sinkendem Partialdruck des n-Propanols fällt die durch die Dampfdruckkurve (Abbildung 2.1) festgelegte Gleichgewichtstemperatur. Die Tropfentemperatur muss während der Kondensation unterhalb der Gleichgewichtstemperatur liegen. Sie sinkt daher ebenfalls bei verzögerter Kondensation. Entsprechend der geringer werdenden Temperaturdifferenz zwischen dem Tropfen und des den Tropfen umgebenden Gases kommt die Kondensation zum Stillstand. Bis hier ist ausschließlich die Kondensationsenthalpie für den Temperaturanstieg der Umgebung verantwortlich. Jetzt folgt ein stabiler Zustand, während dessen sich die Tropfengröße nicht ändert. Während der Gleichgewichtsphase

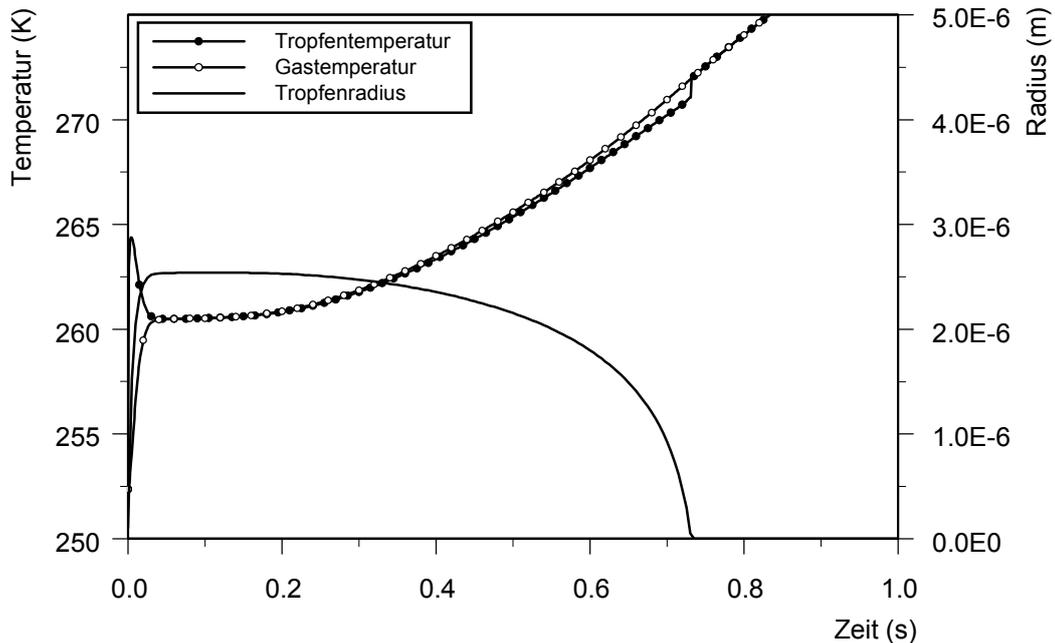


Abbildung 5.5: Tropfentemperatur, Gastemperatur und Tropfenradius am Gitterpunkt [ $r = 27 \text{ mm}$ ,  $z = 4 \text{ mm}$ ] in Abhängigkeit der Zeit.

sind Tropfentemperatur, Gleichgewichtstemperatur und Umgebungstemperatur identisch. Im nächsten Schritt folgt ein leichter Temperaturanstieg durch Wärmeleitung. Der Tropfen wird langsam aus dem Gleichgewicht mit seiner Umgebung gebracht, so dass die Verdampfung beginnt. Dabei stellt sich eine, diesmal entsprechend der Richtung des Wärmestroms umgekehrte Temperaturdifferenz ein, welche mit steigender Massenstromdichte zunimmt. Die Temperaturdifferenz und damit die Massenstromdichte steigen bis zum Verschwinden des Tröpfchens kontinuierlich an.

In den Grafiken 5.6 bis 5.9 werden eine Reihe von Randbedingungen der Reihe nach variiert und mit dem experimentell überprüften Fall verglichen, um ihren Einfluss zu untersuchen. In allen Grafiken ist der experimentell überprüfte Referenzfall abgebildet (schwarze Linie, Kreuze). Folgende Punkte werden variiert:

- Die Temperaturänderung der Umgebung durch Verdampfungsenthalpie wird nicht berücksichtigt (schwarze Linie, Kreise).
- Verringerung der Keimkonzentration um eine Größenordnung (grüne Linie, Kreise)
- Erhöhung der Keimkonzentration um eine Größenordnung (grüne Linie, Punkte).
- Halbierung des Propanol Partialdruckes (blaue Linie, Kreise).

- Verdoppelung des Propanol Partialdruckes (blaue Linie, Punkte).

Die erste Grafik zeigt die ortsabhängige Tropfengröße, wobei die Veränderungen der Erwartung entsprechen und die Modellvorstellung bestätigen.

Grafik 5.7 stellt die Tröpfchengröße zeitabhängig dar. Man erkennt den starken Einfluss der Keimkonzentration auf die Tropfengröße, wobei die Lebensdauer nur gering beeinflusst wird. Diese wiederum kann besser durch Veränderung des Partialdruckes eingestellt werden.

Die Temperaturkurven entlang des Radius in Abbildung 5.8 weisen, solange die Temperatur in der Zylindermitte noch unbeeinflusst ist, alle nahezu den gleichen Temperaturgradienten auf. Der Wärmestrom in den Zylinder ist bis zu diesem Zeitpunkt für alle Fälle nahezu gleich. Die Temperatur innerhalb des Zylinders ist nur durch die Menge des insgesamt verdampften Propanols festgelegt. Auf den ersten Blick nicht selbstverständlich ist der Unterschied zwischen den beiden grünen Kurven. Bei wenigen großen Tropfen kondensiert bei gleichem Partialdruck eine geringe Menge mehr Propanol als bei kleinen Tropfen. Die Erklärung folgt aus einem Blick in die Kelvin-Gleichung (Gleichung 2.10). Sie schreibt vor, dass der Partialdruck der kondensierenden Komponente über der Flüssigkeitsoberfläche bei großen Tropfen niedriger ist als bei kleinen. In dem Experiment mit der geringeren Keimkonzentration muss daher geringfügig mehr Propanol kondensieren um die Tröpfchen ins Gleichgewicht mit ihrer Umgebung zu bringen als bei höherer Keimkonzentration.

Zu guter Letzt ist im Diagramm 5.9 die Entwicklung der Totaldruckverläufe gezeigt. Sie sind nichts anderes als ein Maß für die durchschnittliche Temperatur innerhalb des Zylinders. Sie unterscheiden sich nur am Anfang, wenn ein Teil der in dem Zylinder befindlichen Energie als Verdampfungsenthalpie in der Flüssigkeit gespeichert ist und nicht zur erhöhten Temperatur beiträgt. Wenn die Tropfen verdampft sind, nähern sich die Druckverläufe einander an. Dabei erreichen die Varianten, bei denen die Temperatur zunächst am niedrigsten war natürlich die höchsten Endwerte, da der vormalig größere Temperaturabstand mit einem etwas höheren Wärmestrom verbunden ist.

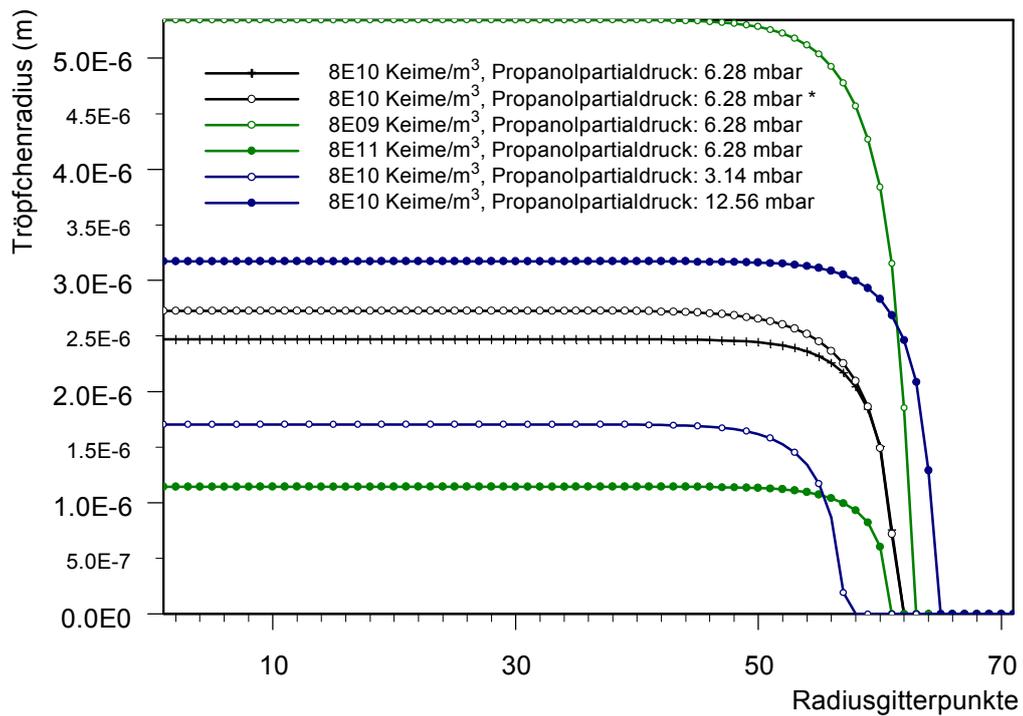


Abbildung 5.6: Verdampfungsfronten an der Stelle  $z = 2$  mm entlang der Radiuskoordinate bei Variation einiger Randbedingungen nach 0,3 s. (\* Verdampfungsenthalpie nicht berücksichtigt)

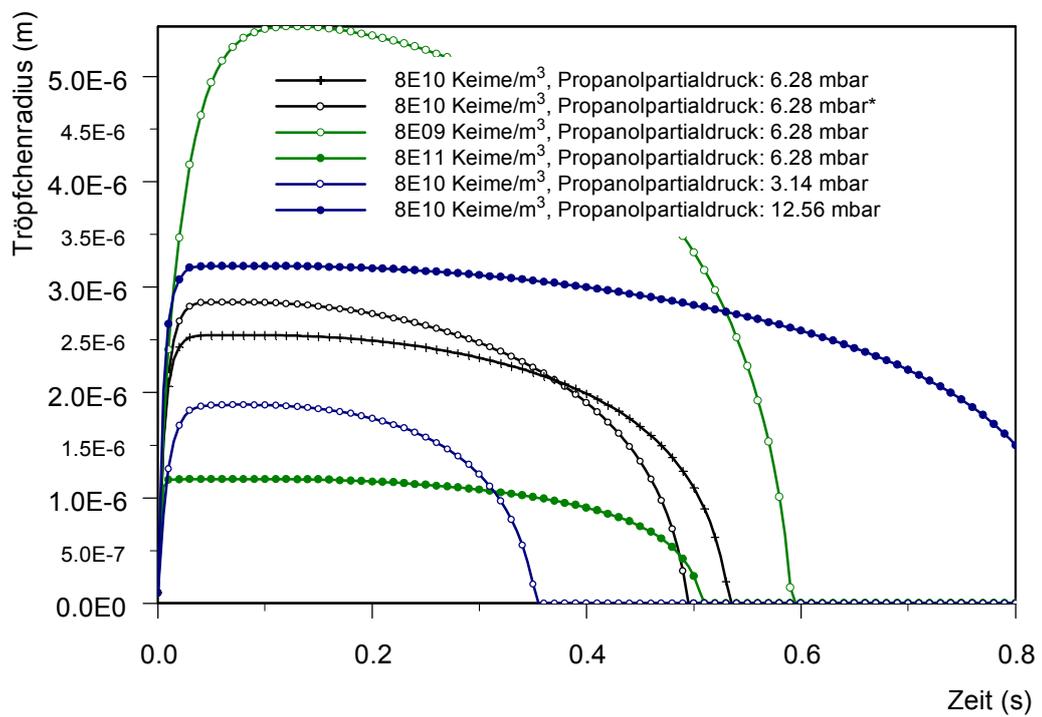


Abbildung 5.7: Tröpfchenwachstum an der Stelle  $z = 2$  mm und  $r = 27$  mm bei verschiedenen Randbedingungen. (\* Verdampfungsenthalpie nicht berücksichtigt)

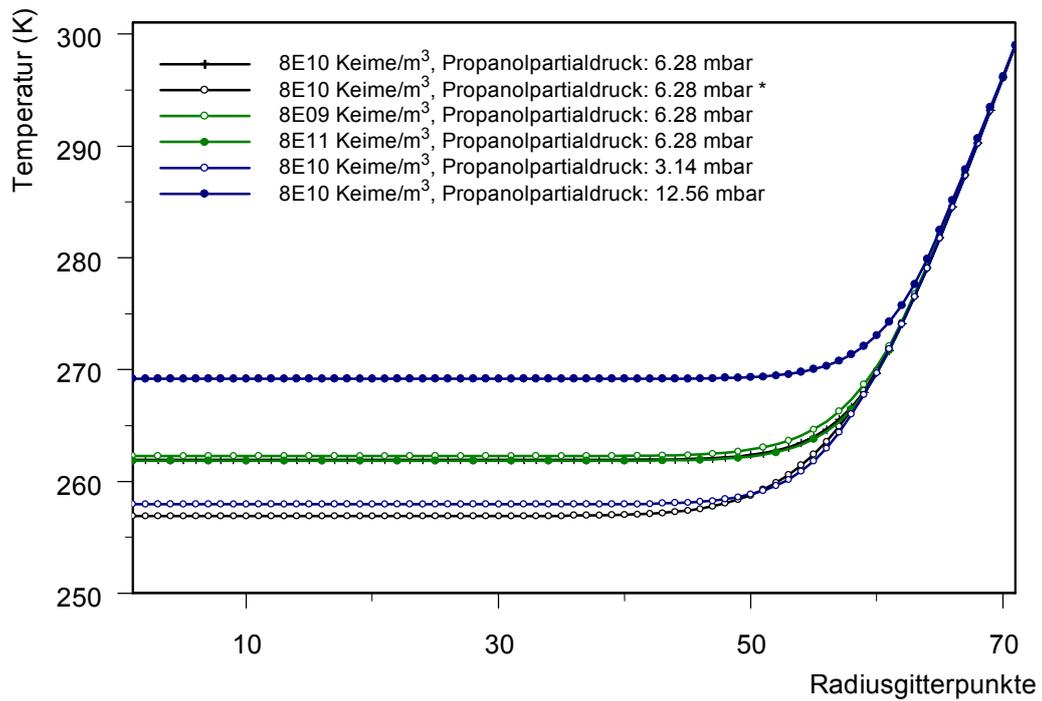


Abbildung 5.8: Temperaturverläufe an der Stelle  $z = 2$  mm entlang der Radiuskoordinate bei unterschiedlichen Randbedingungen nach 0,3 s. (\* Verdampfungsenthalpie nicht berücksichtigt)

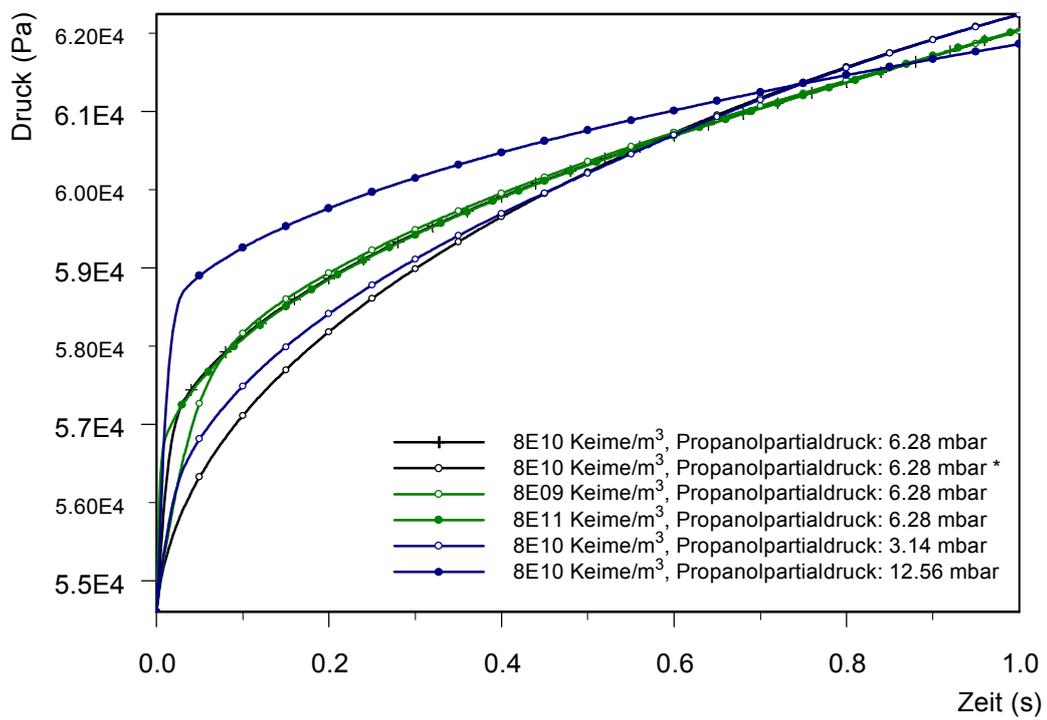


Abbildung 5.9: Totaldruckentwicklung innerhalb des pex-tubes bei Veränderung einiger Randbedingungen. (\* Verdampfungsenthalpie nicht berücksichtigt)

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Aufbauend auf grundlegende Arbeiten [15, 21] werden für den Einzeltropfen aufgestellte Wachstumsgesetze für homogene Tropfenkondensation und -verdampfung auf einen Tröpfchennebel in einer einfachen technischen Umgebung angewendet. Dazu wird in einem ersten Schritt die Geometrie eines pex-tubes und die von den Wandflächen durch Wärmeleitung eingetragene thermische Energie berücksichtigt.

Die Arbeit beginnt mit einer Beschreibung der Modellvorstellung der homogenen Keimbildung und des anschließenden Tropfenwachstums über mehrere Knudsen-Zahl Bereiche. Nach Einführung mehrerer Vereinfachungen werden die aus [15] bekannten Wachstumsgesetze vorgestellt. Der nächste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Wärmeleitung innerhalb des pex-tubes, wobei zwei Lösungsmöglichkeiten der Wärmeleitgleichung und ihre Anwendbarkeit auf das vorliegende Problem diskutiert werden. Die theoretischen Betrachtungen führen zur Entwicklung eines Simulationsprogrammes, wobei die Programmstruktur anhand eines Flussdiagrammes detailliert dargestellt wird und auch die grafische Benutzeroberfläche dokumentiert ist. Der dritte Teil der Arbeit ist dem der experimentellen Verifikation dienenden pex-tube Experiment und seiner Besonderheit, der isentropen Expansion, gewidmet. Aus dem Vergleich der Simulationsergebnisse mit den experimentellen Daten wird eine gute Übereinstimmung im Bereich der ersten zehntel Sekunden des Experiments gefunden. Danach gewinnt die in der Simulation nicht berücksichtigte Konvektion an Bedeutung. Anhand des Vergleichs weiterer Berechnungen bei variierten Randbedingungen mit dem experimentell verifizierten Referenzfall kann das Verständnis der Tropfenkondensation vertieft werden.

Die Berücksichtigung der einsetzenden Konvektion scheint nicht trivial zu sein. Sie würde die Berechnung auch nicht näher an praxisrelevante Bedingungen heranführen. Wesentlich interessanter wäre als nächster Schritt die Berücksichtigung einer konstanten, überlagerten Strömung, wie sie zum Beispiel von einer Einspritzdüse hervorgerufen wird. Dabei kann eventuell auch eine ungleichmäßige Verteilung der Tröpfchen in die Simulation einfließen. Die Arbeit führt dann auf die Berechnung der Vorgänge wie sie zum Beispiel bei der Verdampfung von Diesel-Kraftstoff in einer Kolbenmaschine zwischen Einspritzvorgang und Zündung herrschen. Dabei muss natürlich noch

die durch die Kolbenbewegung veränderte Geometrie in die Randbedingungen einfließen. Parallel dazu ist die Entwicklung einer Versuchseinrichtung notwendig, mit der sich die Ergebnisse überprüfen lassen. Dazu müsste die Geschwindigkeit und die Tropfengröße innerhalb des Zylinders gemessen werden. Beide Informationen lassen sich aus fotografischen Aufnahmen ableiten. Die PIV-Auswertung einiger Aufnahmen gibt Aufschluss über die Geschwindigkeiten (siehe Abbildung 5.2). Die Größe der Tropfen kann nach Graßmann [4] mit Hilfe einer Abbildungstechnik gewonnen werden, bei der die beleuchteten Tröpfchen sich wenig außerhalb des Brennpunktes des Kameraobjektivs befinden. Dadurch werden aufgrund der Besonderheiten der Streuung von Licht an kleinen Partikeln (Mie-Streuung) nicht mehr die Partikel selbst abgebildet. Vielmehr entsteht statt des Tröpfchens, eine streifige Abbildung in Form der Kamerablende. Die Streifenanzahl ist ein Maß für die Größe des Partikels.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Dampfdruckkurve . . . . .	4
2.2	Keimbildungsenthalpie . . . . .	6
2.3	Zustandsänderungen um einen Einzeltröpfchen . . . . .	9
2.4	Modellvorstellung des Tröpfchenwachstums . . . . .	10
2.5	sphärisches Doppelschalenmodell zur Wachstumsberechnung . . . . .	11
2.6	Zylinderkoordinaten . . . . .	14
2.7	Diskretisierung zweiter Ordnung . . . . .	16
2.8	Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung der Wärmeleitgleichung . . . . .	19
2.9	Einfluss eines Tröpfchennebels auf die Wärmeleitung . . . . .	20
3.1	Flussdiagramm des Computerprogrammes . . . . .	24
3.2	Grafische Benutzeroberfläche des Computerprogrammes . . . . .	27
4.1	Kolbenexpansionsrohr . . . . .	30
4.2	Druckverlauf im Kolbenexpansionsrohr . . . . .	31
5.1	Experimente . . . . .	33
5.2	Konvektion in Wandnähe . . . . .	34
5.3	Simulationsergebnis . . . . .	35
5.4	Vergleich der Experimente mit der Simulation . . . . .	36
5.5	zeitabhängige Simulationsergebnisse . . . . .	38
5.6	Tröpfchenradius entlang der Radiuskoordinate . . . . .	40
5.7	zeitabhängiges Tröpfchenwachstum . . . . .	41
5.8	Temperaturverläufe entlang der Radiuskoordinate . . . . .	42
5.9	berechnete Druckverläufe während der Experimente . . . . .	43
B.1	zur Oberflächenspannung . . . . .	50

# Anhang A

## Stoffwerte

Die im Folgenden angegebenen Stoffwerte stammen im Wesentlichen aus [8, 9, 17].

Molmasse $M$ [kg/mol]	
Stickstoff	$28,0134 \cdot 10^{-3}$
n-Propanol	$60,0956 \cdot 10^{-3}$
spezielle Gaskonstante $R$ [J/(kg K)]	
Stickstoff	296,8
n-Propanol	138,4
dynamische Viskosität $\eta$ (Gas) [Pa s]	
Stickstoff	$(1,378 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{T}) / (1 + 103/T)$
n-Propanol	$-1,42907 \cdot 10^{-6} + (1,45108 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{T}) + 2,26049 \cdot 10^{-8} \cdot T$
spezifische Wärmekapazität $c_p$ [J/(kg K)]	
Stickstoff	1042
n-Propanol	$-1,94022 \cdot 10^3 + 2,31831 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{T} - \dots$ $1,7757 \cdot T - 4,76687 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 1,42444 \cdot 10^{-7} \cdot T^3$
spezifische Wärmekapazität $c_v$ [J/(kg K)]	
Stickstoff	744,286
n-Propanol	$c_p - R$
Isentropenexponent $\kappa$	
Stickstoff	1,4
n-Propanol	$c_p / c_v$

Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  (Gas) [W/(m K)]

Stickstoff	$3,919 \cdot 10^{-4} + 9,816 \cdot 10^{-5} \cdot T - 5,067 \cdot 10^{-8} \cdot T^2 + \dots$ $1,504 \cdot 10^{-11} \cdot T^3$
n-Propanol	$-7,931 \cdot 10^{-3} + 3,987 \cdot 10^{-5} \cdot T + 1,193 \cdot 10^{-7} \cdot T^2 - \dots$ $5,021 \cdot 10^{-11} \cdot T^3$

Gleichgewichtsdampfdruck  $p_e$  [Pa]

n-Propanol	$133,32 \cdot \exp(-11286,4904/T + 150,24797 - 19,19 \cdot \lg(T))$
------------	---

Dichte  $\rho$  (Flüssigkeit) [kg/m<sup>3</sup>]

n-Propanol	$0,2744 \cdot 10^3 \cdot (1 + 1,85051 \cdot \tau^{1/3} + 0,82572 \cdot \tau^{2/3} + \dots$ $0,10428 \cdot \tau^{4/3})$ mit $\tau = 1 - T/536,8$
------------	---

Siedetemperatur  $T_{b,n}$  bei Normaldruck [K]

n-Propanol	370,3
------------	-------

kritischer Punkt

n-Propanol	$p^* = 51,7 \cdot 10^5$ Pa $T^* = 536,8$ Pa
------------	--

Oberflächenspannung  $\sigma$  [N/m]

n-Propanol	$0,02528 - 8,394 \cdot 10^{-5} \cdot (T - 273,15)$
------------	--

Im VDI-Wärmeatlas [9] wird folgende Gleichung zur Berechnung der temperaturkorrigierten Verdampfungsenthalpie  $\Delta h_v$  [J/kg] vorgeschlagen:

$$\Delta h_v = \Delta h_b \cdot \left( \frac{1 - T/T^*}{1 - T_{b,n}/T^*} \right)^{0,38} \quad (\text{A.1})$$

mit 
$$\Delta h_b = R \cdot T_{b,n} \cdot \frac{0,4343 \cdot \lg \frac{p^*}{1 \cdot 10^5} - 0,69377 + 0,89584 \cdot \frac{T_{b,n}}{T^*}}{0,37691 - 0,37306 \cdot \frac{T_{b,n}}{T^*} + \frac{0,15057}{\frac{p^*}{1 \cdot 10^5} \cdot \left(\frac{T_{b,n}}{T^*}\right)^2}}$$

Der binäre Diffusionskoeffizient  $D$  [m<sup>2</sup>/s] von n-Propanol in Stickstoff berechnet sich nach Gleichung A.2.

$$D = 3,74097 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{T^{1,75}}{p_t} \quad (\text{A.2})$$

Die Stoffwerte  $\bar{P}$  eines Gasgemisches, welches aus den Komponenten A und B mit den Partialdrücken  $p_A$  und  $p_B$  zusammengesetzt ist, erhält man aus der Mittelung der Stoffwerte der Einzelkomponenten  $P_A$  und  $P_B$  entsprechend ihrer Molmassenanteile

(Gleichung A.3). Der Molmassenanteil folgt aus Gleichung A.4. Darin ist  $\bar{M}$  die mittlere Molmasse des Gasgemisches, welche sich aus Gleichung A.5 ergibt.

$$\bar{P} = x_A \cdot P_A + x_B \cdot P_B \quad (\text{A.3})$$

$$x_A = \frac{M_A}{\bar{M}} \cdot \frac{p_A}{p_A + p_B} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{M} = \frac{p_A}{p_A + p_B} \cdot M_A + \frac{p_B}{p_A + p_B} \cdot M_B \quad (\text{A.5})$$

Die mittlere freie Weglänge  $l$  [m] der Moleküle eines Gasgemisches zwischen zwei Zusammenstößen folgt aus Gleichung A.6.

$$l = \frac{\bar{\eta}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi RT}}{p_A + p_B} \quad (\text{A.6})$$

# Anhang B

## Ergänzende Erläuterungen

### B.1 Druckerhöhung durch Oberflächenspannung

Wird ein kugelförmiger Tropfen gedanklich in zwei Hälften geteilt, so können die freigeschnittenen Kräfte angeschrieben werden (Abbildung B.1). Die aus der Oberflächenspannung rührende Kraft  $F = \sigma \cdot U$  hält die beiden Teile zusammen. Ihr wirkt eine gleich große aber entgegengerichtete Kraft  $F = p \cdot A$  entgegen. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt der Zusammenhang zwischen innerer Druckerhöhung und Oberflächenspannung:

$$p = \frac{2 \cdot \sigma}{r} \quad (\text{B.1})$$

### B.2 Isentrope Expansion im pex-tube

Die folgende Rechnung basiert auf [12]. Die Menge der inneren Energie  $dE$  eines Systems kann durch Zu- oder Abfuhr von Wärme  $dQ$  oder Arbeit  $dW$  verändert werden. Das pex-tube gibt über die Kolbenstange Volumenänderungsarbeit  $p dv$  ab. Weder Wärme noch Masse passieren während der Expansion die Systemgrenze. Massenspezifisch gilt für die Änderung der inneren Energie der Expansionskammer Gleichung

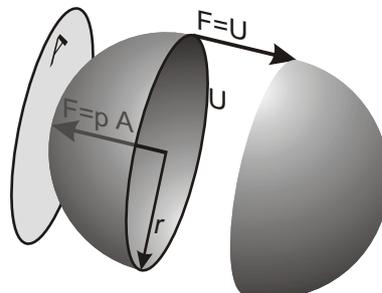


Abbildung B.1: Oberflächenspannung in kugelförmigen Tropfen.

B.2.

$$de = -pdv \quad (\text{B.2})$$

Die Änderung der spezifischen inneren Energie  $de$  drückt sich durch eine Temperaturänderung nach  $de = c_v dT$  aus. Mit diesem Zusammenhang und der idealen Gasgleichung der Form  $p = RT/v$  wird Gleichung B.2 zu Gleichung B.3.

$$c_v dT = -\frac{RT}{v} dv \quad (\text{B.3})$$

Nach der Trennung der Variablen und Integration folgt Gleichung B.4.

$$\begin{aligned} c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT &= -R \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v} dv \\ c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) &= -R \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{-R}{c_v}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Es gilt  $R = c_p - c_v$  und  $\kappa = c_p/c_v$  womit Gleichung B.4 in die bekannte Isentropenbeziehung (Gleichung B.5) übergeht.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-\kappa} \quad (\text{B.5})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] Baehr, H. D., Stephan, K.; *Wärme- und Stoffübertragung*; 3. Auflage; Springer-Verlag; 1998
- [2] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., Mühlig, H.; *Taschenbuch der Mathematik*; 2. Auflage; Verlag Harri Deutsch; 1995
- [3] Ehrler F., Schaber K.; *Spontane Kondensation*; in: Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.); *VDI-Wärmeatlas*, CD-ROM 8. Auflage 1, Abschnitt Je; Springer-Verlag; 1997
- [4] Graßmann, A., Peters, F.; *Bestimmung der Tröpfchengröße in Tröpfchenwolken durch einen MIE Streulichteffekt*; in: Zhang, Zh., Ruck, B., Leder, A., Dopheide, D. (Hrsg.); *Proceedings der 9. GALA-Fachtagung „Lasermethoden in der Strömungsmeßtechnik“*, Fa. Sulzer Innotec, Winterthur/Schweiz, 18.-20. September 2001; Shaker-Verlag Aachen; 2001
- [5] Grigull U., Sandner, H.; *Wärmeleitung*; 2. Auflage; Springer-Verlag; 1990
- [6] Gyarmathy G., Meyer. H.; *Spontane Kondensation*; in: Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.); *VDI-Forschungsheft 508*; VDI-Verlag; 1965
- [7] Krämer E.; *Dampfturbinen*; in: Beitz, W., Grote, K.-H. (Hrsg.); *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*, 20. Auflage, S. R57 - R70; Springer-Verlag; 2001
- [8] *Landolt-Börnstein Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*; Online-Version: <http://www.landolt-boernstein.com/>; Springer-Verlag 2002
- [9] Lucas K., Luckas M.; *Berechnungsmethoden für Stoffeigenschaften*; in: Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.); *VDI-Wärmeatlas*, CD-ROM 8. Auflage 1, Abschnitt Da; Springer-Verlag; 1997
- [10] Marsal, D.; *Finite Differenzen und Elemente*; Springer-Verlag; 1989
- [11] Paikert, B.; *Untersuchung der Kondensation und Verdampfung ruhender Tropfen in Gas-Dampf-Gemischen mit Hilfe eines Stoßwellenrohres*; Dissertation; Universität Essen, 1990

- [12] Peters, F.; *Gasdynamik*; Vorlesungsskript, S. 16, 17; Universität Essen, Strömungslehre; SS 2001
- [13] Peters, F., Meyer, K. A. J.; *Measurement and interpretation of growth of monodispersed water droplets suspended in pure vapor*; International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 38 No. 17, pp. 3285 - 3293; 1995
- [14] Peters, F., Paikert, B.; *Nucleation and growth rates of homogeneously condensing water vapor in argon from shock tube experiments*; Experiments in Fluids, No. 7, pp. 521 - 530; 1989
- [15] Peters, F., Paikert, B.; *Measurement and interpretation of growth and evaporation of monodispersed droplets in a shock tube*; International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 37 No. 2, pp. 293 - 302; 1994
- [16] Peters, F., Paikert, B.; *Shock Tube Study of Droplet-Vapor Phase Transition of Hexane in Argon*; in: Brun, R., Dumitrescu, L. Z. (Hrsg.); *Shock Waves @ Marseille III*; 1995
- [17] Reid, R. C., Prausnitz, J. M., Poling, B. E.; *The Properties of Gases & Liquids*; Fourth Edition; McGraw-Hill Book Company; 1987
- [18] Rodemann, T.; *Homogene Keimbildung und Tröpfchenwachstum in binären Dampfmischungen*; Dissertation; Universität Essen, Shaker Verlag; 1997
- [19] Tautz, H.; *Wärmeleitung + Temperaturlausgleich*; Verlag Chemie GmbH; 1971
- [20] Volmer, M., Weber, A.; *Keimbildung in übersättigten Gebilden*; Zeitschrift der physikalischen Chemie, Nr. 119, S. 277 - 301, 1926
- [21] Young, J. B.; *The condensation and evaporation of liquid droplets at arbitrary Knudsen number in the presence of an inert gas*; International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 36 No. 2, pp. 1241 - 2956; 1993

# Index

- Aerosol
  - Atmosphäre, 2
- Anisotropie, 18
- Arbeit
  - Druckänderung, 4, 5
  - Oberflächenbildung, 4, 5
- Besselfunktionen, 15
- Biot-Zahl, 8
- Blaubrenner, 1
- Cluster, 3–5
- Computeralgebraprogramme, 25
- Dampfdruckkurve, 3
  - $p,T$ -Diagramm, 4
- Dichte, 48
- Differentialgleichung der Wärmeleitung,
  - siehe* Wärmeleitgleichung
- Differenzengleichung, 16, 18
- Differenzenquotient, 15, 16
  - zweiter Ordnung, 16
- Differenzenverfahren, 15
- Diffusionskoeffizient, 48
- Eigenwerte, 14
- Einzeltröpfchen, 9
- Expansionsfaktor, 30
- explizites Differenzenschema, 17, 18
- Ficksche Diffusion, 8
- finite Differenzen, *siehe* Differenzenverfahren
- Flussdiagramm, 22, 24
- freie Weglänge, 49
- Front, *siehe* Verdampfungsfront
- Gibbs-Funktion, 4
- Gitter, 19
- Gleichgewichtsdampfdruck, 48
- griechische Buchstaben, III
- Hochgeschwindigkeitskamera, 30
- Ideale Gasgleichung, 5
- implizites Differenzenschema, 17
- innere Wärmequelle, 13
- IR-Strahlung, 13
- isentropische Expansion, 2, 3, 29, 50
- Isentropenexponent, 47
- Isentropengleichung, 29, 51
- jar-Archiv, 25
- Java, 25
- Keimbildung, 3
- Keimbildungsenthalpie, 5, 6
- Keimbildungsrate, 6, 32
- Keimkonzentration, 7, 26
- Kelvin-Gleichung, 6, 8, 21
- kinetische Gastheorie, 9, 11
- klassische Keimbildungstheorie, 7
- Klimaforschung, 2
- Knudsen-Schicht, 11
- Knudsen-Zahl, 9
- Koagulation, 7
- Kolbenexpansionsrohr, *siehe* pex-tube
- Kondensation
  - heterogen, 1
  - homogen, 1, 3
- Kondensationskoeffizient, 12
- Kontinuitätsgleichung, 12
- Kontinuumshypothese, 9
- Konvektion, 8, 13, 33, 37
- Kraftstoffeinspritzung, 1

- Kristall, 7
- kritischer Punkt, 48
- kritischer Radius, 5–7
- Laplace-Transformation, 14
- Laplacescher Operator, 13, 15
- latente Wärme, *siehe* Kondensationsenthalpie
- Laufzeitumgebung, 25
- Makroobjektiv, 30
- Massenstromdichte, 11, 12
- Membranpumpe, 31
- Meteorologie, 2
- Modul, 28, 33
- Molmasse, 47
- Molmassenanteil, 49
- Neumann Kriterium, 18
- numerische Dispersion, 18, 23
- Oberflächenspannung, 4, 8, 48, 50
- pex-tube, 2, 29, 31, 50
  - Abbildung, 30
- Piezo-Druckaufnehmer, 31
- PIV, 34
- Prandtl-Zahl, 12
- Programmierung, 22
- quadratische Zeitachse, 26
- Randbedingungen
  - 1. Art, 13, 14
  - 3. Art, 14
- Rekompression, 30
- Runtime Environment, *siehe* Laufzeitumgebung
- Sättigungsgrad, 3, 6
- Schablone, 17
- Schmidt-Zahl, 12
- Schrittweite, *siehe* Gitterweite
- Sekantenverfahren, 23
- Siedetemperatur, 48
- Stabilität, 18
- Stefan-Strom, 8
- Stoßwellenrohr, 29
- Stoffwerte, 47
- Symbole, II
- Taylor-Reihe, 14
- Temperaturleitfähigkeit, 13
- Thomson-Gleichung, 6
- Tracer-Partikel, 33
- Treibdruck, 32
- Treibhauseffekt, 2
- Tropfchenkonzentration, 7
- Tropfenschlag, 1
- Tropfentemperatur, 37, 38
- Turbine
  - Dampfturbine, 1
  - Nasslauferturbine, 1
  - Triebwerk, 1
- Übergangskorrektur, 11
- Übersättigung, 3, 6
- Verbrennung, 1
- Verdampfungsenthalpie, 48
- Verdampfungsfront, 21, 33, 34
- Verdampfungskoeffizient, 12
- Viskosität, 47
- Wachstum, 7
- Wachstumsgesetze, 7
- Wärmekapazität, 47
- Wärmeleitfähigkeit, 48
- Wärmeleitgleichung, 13
  - geschlossene Lösung, 14
  - numerische Lösung, 15
- Wärmeleitung, 13
- Wärmestrahlung, 13
- Wärmestromdichte, 11, 12
- Zylinderfunktionen, *siehe* Besselfunktionen